COLECCIÓN

PAPEL 451

Textos básicos, imprescindibles para acceder al conocimiento de las estructuras culturales del mundo contemporáneo. Una colección de textos no numerarios en aula libre.

2. **DEL YO AL NOSOTROS, Ramón Valls Plana.** 2.ª edición.
4. **LA EVOLUCIÓN DE LA AGRICULTURA EN ESPAÑA, José Manuel Naredo,** 3.ª edición.
6. **TEORÍAS E HISTORIA DE LA ARQUITECTURA, Manfredo Tafuri.** 3.ª edición.
7. **LOS FUNDAMENTOS DE LA FE, Leslie Dewart.**
8. **DOSTOIEVSKI (1821-1881), Edward H. Carr,** 2.ª edición.
9. **FUNDAMENTOS DE LA ARITMÉTICA, Gottlob Frege.** 2.ª edición.
11. **LA FORTALEZA VACÍA, Bruno Bettelheim.** 3.ª edición.
12. **DEFICIENCIA MENTAL Y LENGUAJE, Marie de Maistre.** 2.ª edición.
15. **METODOLOGÍA DE LAS CIENCIAS SOCIALES, Raymond Boudon y Paul Lazarsfeld.** 2.ª edición. Vol. I.
16. **LA MAYORÍA MARGINADA, Franco Basaglia, Franca Basaglia Ongaro.**
17. **EL PAÍS ERRADO, Mario Lodi.**
18. **LA ESCRITURA DEL NIÑO, J. de Ajuriaguera.** 4.ª edición. Vol. I.
19. **LA ESCRITURA DEL NIÑO, J. de Ajuriaguerra.** 4.ª edición. Vol. II.
21. **LA LÓGICA DE LO VIVIENTE, François Jacob.** 2.ª edición.
22. **EL REALISMO FRANCÉS, Harry Levin.**
24. **FONOLOGÍA GENERAL, Zarko Muljacic.**
25. **METODOLOGÍA DE LAS CIENCIAS SOCIALES, Raymond Boudon y Paul Lazarsfeld.** 2.ª edición. Vol. II.
26. **LA CRISIS DE LA SOCIOLOGÍA, Raymond Boudon.**
28. **EL DIBUJO DEL NIÑO INADAPTADO, Henry Aubin.** 2.ª edición.
30. **NACIMIENTO DE UNA PEDAGOGÍA POPULAR, Élise Freinet.** 2.ª edición.
32. **METODOLOGÍA DE LAS CIENCIAS SOCIALES, François Chazel, Raymond Boudon y Paul Lazarsfeld.** Vol. III.
33. **LA REVOLUCIÓN DE 1917, Marc Ferro.**
34. **EL PROCESO DE MADURACIÓN EN EL NIÑO, D. W. Winnicott.** 2.ª edición.
35. **CURSO DE FILOSOFÍA PARA CIENTÍFICOS, Louis Althusser.** 2.ª edición.

LUCIO LOMBARDO RADICE

LA MATEMÁTICA DE PITÁGORAS A NEWTON

Traducción de Juan Vivanco

editorial laia/barcelona

La edición original italiana fue publicada por Editori Riuniti en 1971 y reeditada en 1979, con el título: *La matematica da Pitagora a Newton*









Traducción de Juan Vivanco
Diseño y realización de la cubierta: Enric Satué
Primera edición: mayo, 1983

Propiedad de esta edición (incluida la traducción y el diseño de la cubierta): Editorial Laia, S. A.
Constitución, 18-20, Barcelona-14

Depósito legal: B. 17.525 - 1983

ISBN: 84-7222-392-2

Impreso en: Romanyà/Valls, Verdaguer, 1 - Capellades (Barcelona)

Printed in Spain

Hace nueve años dediqué a mis hijos Daniele, Marco y Giovanni, y a mis sobrinos Celeste, Bruna, Chiara, Renata, Guido y Andrea, que entonces eran adolescentes o todavía niños, estas páginas escritas para los pequeños.

Ahora renuevo esta dedicatoria, y la tengo que ampliar con cariño a los nuevos hijos y nietos que a través de ellos he tenido, a Marina, Marco, Giorgio y Chris; a la primera querida criatura de la nueva generación, Giovannina, que acaba de nacer de Celeste y Marco, y a muchas más que espero la habrán de seguir.

Tendría que seguir alargando la dedicatoria de hace cinco años, porque la nueva generación se multiplica: añadiré sólo el nombre de mi primera nietecilla, Lucía, hija de Daniele y de Bárbara.

Roma, marzo de 1976

ADVERTENCIA A LOS LECTORES ANTES DE QUE EMPIECEN A LEER

Hace casi dos mil trescientos años, cuando reinaba en Egipto Ptolomeo I (que reinó del 306 al 283 aC.), el sabio griego Euclides escribió un libro famoso, los Elementos *(de geometría). Se trata del libro que, después de la Biblia y las obras de Lenin, ha tenido más ediciones y se ha traducido a más lenguas: ha sido, hasta hace algunos decenios, el libro de geometría para la enseñanza media. Pues bien, el rey Ptolomeo empezó a leerlo, pero se cansó en seguida. Le costaba mucho trabajo seguir los largos y minuciosos razonamientos de Euclides. El rey mandó entonces llamar al científico, y le preguntó si en geometría existía alguna vía más corta y menos trabajosa que la de los* Elementos. *A lo que Euclides respondió que no, que «en matemáticas no hay caminos reales».*

Para entender la matemática hay que hacer funcionar el cerebro, y esto siempre supone algún esfuerzo. No es posible hacer unas matemáticas «de tebeo», no es posible transformar su historia en una novelita. El que tenga la mente perezosa, el que no sienta el placer de hacer trabajar su cerebro, es mejor que ni siquiera empiece a leer. En cambio, el que no se asusta de los esfuerzos de la mente, que no se desanime si, aquí o allá, no entiende algo, a primera vista; y no pretenda leerlo todo de corrido, sino que lea atentamente, poco a poco, saltándose las cosas más difíciles o haciendo que se las explique alguien que haya estudiado más que él.

Importante: *Se recomienda que todos tengan a mano papel y lápiz para poder repetir por su cuenta los cálculos, dibujos y razonamientos. Se recuerda también que los apéndices a los que se hace referencia en el texto se encuentran al final del volumen.*

L. L. R.

1. Los números

Un maravilloso invento del hombre

Desde muy pequeños, por lo general aún antes de ir a la escuela, aprendemos a leer las palabras y los números; hasta tal punto esto se convierte en un hábito, que no nos damos cuenta de la extraordinaria genialidad del hombre, que ha conseguido con sólo 21 «letras» (ó 24, ó 26, según los idiomas) escribir todas las posibles, infinitas palabras, y con sólo 10 «cifras», todos los posibles, infinitos números. Con 31 signos, pues, nos convertimos a los seis años, y a menudo incluso antes, en dueños de las llaves que abren los tesoros del mundo: todos los libros, todas las tablas y todos los cálculos que poetas, escritores, físicos, astrónomos y matemáticos han podido legarnos desde que el hombre ha inventado esos dos instrumentos admirables: la *escritura alfabética* y la *numeración posicional*. Son dos invenciones que tienen algo en común, y ambas han costado *miles de años* de esfuerzos a la mente humana. Dar un valor al lugar que ocupa una cifra («principio posicional») era una idea más difícil que la de dividir las palabras en los sonidos que las componen, y escribirlas poniendo unos detrás de otros (o, en algunos idiomas, unos debajo de otros) los signos establecidos para aquellos sonidos, en vez de tomarse el trabajo de inventar y recordar un dibujo distinto, un *ideograma*, para cada palabra. En efecto, en Italia, por ejemplo, el origen de la escritura alfabética se pierde en la oscuridad de la prehistoria: antes del alfabeto *latino*, que es el que se emplea todavía hoy, existían el *griego* y el *etrusco*. En cambio, la introducción de la *numeración árabe* (sería más correcto, como veremos, decir *india*), o sea de una numeración en la que se tiene en cuenta la posición de las cifras, es un hecho histórico relativamente reciente, del que incluso podemos dar la fecha. Estamos en 1202, en tiempos de Marco Polo, las Cruzadas, Federico Barbarroja, las repúblicas marineras italianas; un mercader-matemático italiano, Leonardo Fibonacci, llamado Leonardo el Pisano, escribe un

librillo que merecería tener la misma fama que *Los viajes de Marco Polo* (y quizá que la propia *Divina Comedia* de Dante Alighieri), el *Libro del ábaco* (en latín: *Liber abaci)*, en el que explica genialmente el comodísimo sistema de los árabes para escribir los números y sus aplicaciones.

Una discusión con un muchacho romano antiguo

La gran diferencia frente a la forma de escribir los números empleada hasta entonces no residía en los signos para indicar los números, sino en el modo de emplearlos. Por ejemplo, el signo *(la cifra)* para indicar «uno» es más o menos el mismo en la numeración de los antiguos chinos, egipcios, romanos y en la nuestra, que procede de los árabes: una «barra», un «palito», con alguna pequeña variante. «I» para los romanos (ver apéndice núm. 1), «1» para nosotros. Pero supongamos por un momento que nos encontramos con un muchacho de la antigua Roma y que nos entendemos lo mejor posible con él en latín. Trazamos con un dedo en la arena, como solían hacer los antiguos romanos en los mercados, tres palitos en fila, así:

III.

El muchacho romano antiguo dirá que el número es el «tres», mientras que el muchacho moderno dirá que es el número «ciento once». ¿Quién tiene la razón? Los dos, y ninguno: el caso es que uno sigue una regla, y el otro otra. El romano, cuando escribe: III, quiere decir:

$$1 + 1 + 1 = 3$$

mientras que nosotros, escribiendo *las mismas cifras en el mismo orden*, queremos decir:

$$1 \text{ centena} + 1 \text{ decena} + 1 \text{ unidad} = 100 + 10 + 1 = \\ = \text{ciento once.}$$

De la misma forma, podremos convencer fácilmente al muchacho romano antiguo de que escriba 5 en lugar de V; pero será bastante difícil hacerle comprender que donde pone 51, no debe leer $5 + 1 = 6$, sino 5 decenas + 1 unidad = cincuenta y uno.

«Cálculos» y «ábacos»; zephyrus y algoritmo

En una palabra, entre nuestra forma de escribir los números y la que empleaban los antiguos romanos hay dos diferencias. En primer lugar, ellos empleaban signos distintos de los nuestros: es la diferencia más visible, pero la menos importante. En segundo lugar, «creaban» nuevos números combinando los símbolos fundamentales de una forma completamente distinta a la nuestra, con adiciones y sustracciones de los números representados por signos cercanos (ver la segunda parte del apéndice núm. 1).

Tratemos de escribir con el sistema de los romanos un número un poco elevado, por ejemplo una fecha reciente, como se suele hacer hoy en día en el dintel de los edificios para recordar el año de su construcción. Probemos con «mil novecientos cincuenta y ocho». Habrá que descomponerlo así: mil + novecientos + cincuenta + ocho, y además recordar que: novecientos = mil — cien, y ocho = cinco + tres = cinco + uno + uno + uno; escribiremos pues

MCMLVIII.

Hemos tenido que utilizar *ocho* signos en vez de las cuatro cifras que se necesitan para escribir 1958 en la forma de los indios; y el asunto sería mucho, pero mucho peor si tuviéramos que escribir un número verdaderamente grande. Y además, ¡menudo trabajo tener que inventar cada vez una descomposición que permita que no sean necesarios demasiados signos, menudo trabajo tener que leer un número un poco largo!, ¿cuándo habrá que sumar?, ¿cuándo restar?

Pero con el método romano para escribir los números hay un inconveniente mucho más grave: no se pueden hacer los cálculos como los hacemos nosotros, con la numeración árabe-india. Ni siquiera se puede hacer una adición en columna: no tendría sentido. Efectivamente, los antiguos romanos no realizaban los cálculos con números escritos, sino con... *cálculos*, o sea con piedrecitas. Y es que, en efecto, nuestra palabra «cálculo» viene de la palabra latina *calculus*, que significa «piedrecita». Cálculo ha conservado en español el significado

de piedrecilla, cuando se habla de las acumulaciones que se forman en ciertos órganos debido a su mal funcionamiento («cálculo» en el riñón, «cálculo» en el hígado).

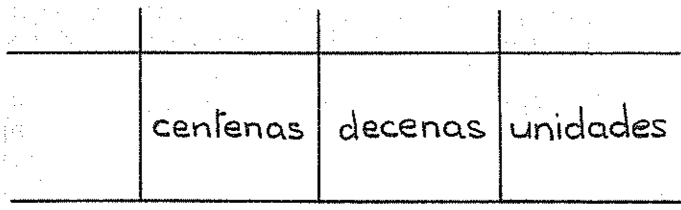
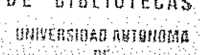


Figura 1

En las columnas así formadas colocaban unas piedrecitas: en la última, una piedrecita por cada *sestercio;* si en la última columna se llegaba a las diez piedrecillas, había que quitarlas y sustituirlas por una única piedrecilla que se colocaba en la *penúltima* columna. Por lo tanto, en la penúltima columna cada piedrecita valía diez de las de la última; en la antepenúltima, cada piedrecita valía diez de las de la penúltima, y así sucesivamente. También se podía utilizar un método análogo con unas pizarrillas apropiadas, llamadas *ábacos.*

Está claro, pues, que en el cálculo práctico con guijarros (o con los *ábacos*) los antiguos romanos habían alcanzado ya la idea del «valor de la posición»: una misma piedrecilla podía valer uno, diez, cien, mil, etc., según la columna en que estuviera colocada. Es más, algunas veces, para ir más de prisa, los antiguos romanos ponían unos signos encima de los guijarros (o encima de unas fichas adecuadas): si encima del *calculus* había cierto signo, valía por dos, si había otro valía por tres, y así sucesivamente hasta nueve. Empezamos a aproximarnos mucho a nuestro modo de escribir los números, ¿no es cierto? Pero todavía queda un paso muy importante, del que nos podemos dar cuenta con un ejemplo. Trataremos de escribir el número tres mil setenta y cinco. Son tres millares, ninguna centena, siete decenas y cinco unidades. Por lo tanto, empezando por el final, hay que colocar cinco *cálculos* en la última columna, siete en la penúltima, ninguno en la antepenúltima y tres en la primera. O si no, para ir más de prisa, usemos *cálculos* con signos encima, que indiquen cuántas piedrecillas vale cala *cálculo,* o mejor reemplacemos esos signos, para que nos resulte más cómodo, por nuestras cifras (arábigas). He aquí cómo aparece el número tres mil setenta y cinco en ambos casos:



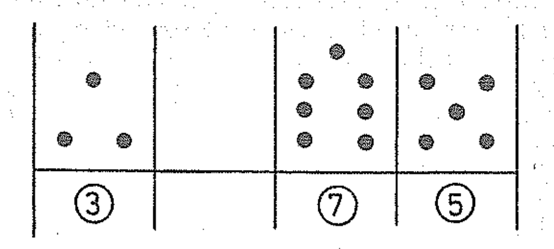


Figura 2

Observemos con atención la última línea: si borramos las líneas verticales, si quitamos las fichas y conservamos únicamente los signos escritos en ellas, todavía nos falta una cosa para tener el número tres mil setenta y cinco tal como lo escribimos nosotros: falta un signo para indicar que en el antepenúltimo lugar no hay ninguna «piedrecita», es decir, que a las cinco unidades y siete decenas no se le añade ninguna centena, sino sólo tres millares exactos. Falta un signo para indicar la columna vacía: falta el *cero.*

¿Tenéis en vuestra casa un diccionario español-latín? Buscad la palabra «cero», y veréis que en latín no existe un término equivalente. Encontraréis el español cero traducido con el latín *nihil* o *núllus numerus,* palabras que de hecho significan «nada», «ningún número». La palabra «cero», en efecto, viene del árabe *sifr,* que quiere decir «vacío» (¿recordáis la columna vacía en el esquema del ejemplo que hemos puesto hace un momento?). Leonardo Pisano, en 1202, al escribir aquel famoso *Liber abaci* del que ya hemos hablado, buscó una palabra latina que sonara de un modo parecido al árabe *sifr,* y escribió: *zephyrus* (que se pronuncia zefirus; es una brisa que también en español se llama céfiro). De aquí evolucionó a «cevero» y finalmente a «cero».

Vemos que la importancia de los árabes en la historia de los números también se pone de manifiesto en las palabras. El mismo término usado por los árabes para el cero, es decir *sifr,* ha dado lugar a nuestra palabra «cifra». Y en efecto el *sifr* es una cifra, es más, se trata de la cifra por excelencia, la más importante, la más difícil de inventar y de entender. Ya hemos dicho que los árabes no inventaron el cero ni la numeración posicional, pero fueron ellos quienes las difundieron, y quienes obtuvieron las primeras consecuencias prácticas y teóricas. Muchas veces nos creemos que la

civilización es sólo obra nuestra, que todos los grandes progresos de la humanidad se deben a los pueblos mediterráneos o incluso sólo a la Europa Occidental. Pero reflexionemos un poco: en el 772 dC, cuando en Europa imperaba el feudalismo, la decadencia de la cultura, y no había ya casi nadie que pudiera entender los libros de ciencia de los antiguos, en Bagdad, la capital del imperio árabe, los embajadores indios llevaban como regalos preciados, no joyas ni oro, sino tablas de cálculos astronómicos escritas con el «nuevo sistema». Y el califa, el «bárbaro sarraceno» en los relatos de los cruzados, pagaba con prodigalidad a los estudiosos para que difundieran por todo su imperio el admirable descubrimiento del pensamiento humano, la nueva forma de calcular, o *algoritmo*, como decimos los matemáticos.

Además, también la palabra «algoritmo» (método de cálculo) es una palabra árabe: se trata de la deformación del nombre del gran sabio a quien el califa había confiado la tarea de difundir la numeración india, que se llamaba precisamente *al-Khuwarizmi.* Si lo pensáis bien, ¿no creéis que se trata de una forma muy noble de convertirse en inmortal, dejando el nombre de uno a una palabra importante, que pronuncian las generaciones sucesivas sin acordarse ya del hombre que le dio origen?

En la época, más o menos, de las luchas entre los güelfos y gibelinos, de las que hablan todos los libros de historia, hubo una lucha entre dos partidos, sin derramamiento de sangre, y sólo con derramamiento de... tinta, de la que los libros de historia generalmente no hablan, y que sin embargo creo que no fue menos importante para la humanidad que las anteriormente citadas; hubo una lucha entre el partido de los *abaquistas* y el de los *algoritmista.* Se trató de la discusión entre los que querían seguir contando con los *ábacos* y los que, en cambio, como Leonardo Pisano, sostenían que había que desechar los ábacos y adoptar el *algoritmo* nuevo, el método de numeración de al-Khuwarizmi. A la larga vencieron los algoritmistas (a la larga, siempre es el progreso el que prevalece), pero fueron necesarios dos siglos largos para que la nueva numeración se difundiera y se impusiera completamente.

También los «ábacos» y las cuentas con los dedos siguen siendo útiles

Pero no despreciemos demasiado a los pobres ábacos. Todavía pueden servir para algo. Pueden ser útiles, por ejemplo, en forma de tablas de contar, con diez bolas en cada *línea* (en lugar de diez piedrecitas por *columna*), para que los niños pequeños comprendan el concepto de «unidad», y luego el de «decena». Las tablas de contar, por otro lado, también pueden servir perfectamente a los mayores (en una oficina, en un comercio), como un instrumento simple, rápido y muy seguro para hacer sumas. Cuando en una fila las diez bolitas se han corrido todas de un lado a otro, por ejemplo de derecha a izquierda, se las coloca de nuevo en su posición inicial y se desplaza una bolita de la fila inmediatamente superior (se trata siempre del valor de la posición, como habréis entendido: cada bolita de la última fila vale una unidad, cada bolita de la penúltima vale una decena, o sea diez bolitas de las de la última, y así sucesivamente). ¡Si vierais con qué rapidez, en Moscú, en Tokio o en Pekín, las encargadas de los comercios hacen cuentas con la tabla! Naturalmente, con la rápida difusión de las cajas registradoras, incluso en los países donde hay una larga tradición de «cálculo manual» con ábacos, esta costumbre se irá perdiendo poco a poco.

Tampoco despreciemos demasiado las «cuentas con los dedos». Los dedos de la mano han sido el primer ábaco del hombre: el primer sistema de numeración ha sido el *mímico,* o sea con gestos de las manos. Todavía se puede encontrar algún vestigio de esto en el lenguaje: por ejemplo en español dígito (del latín *digiti,* los dedos) indica el número de guarismos de las cifras. También en tiempos de Leonardo Pisano y de los primeros algoritmistas, la *indigitación* (el conjunto de reglas para hacer cuentas con los dedos) era una ciencia bastante desarrollada. Hoy día ¿quién estudia eso? Y sin embargo, también en esa vieja ciencia primitiva podemos encontrar alguna regla interesante. ¿Conocéis, por ejemplo, la «regla turca», para obtener los productos entre ellos de los números comprendidos entre el 6 y el 9, o sea para obtener la última parte de la tabla pitagórica, tan antipática y difícil de recordar? (Ver apéndice número 2.)

Los números figurados de Pitágoras

Si reflexionamos un poco, encontraremos en ciertos casos, todavía hoy, que para escribir números no se emplean cifras, sino grupos de signos iguales entre ellos, tantos como sean las unidades del número. Por ejemplo, en los dados los núme-

ros están representados por puntos; en los naipes con «oros», «copas», «espadas» y «bastos» (o con «corazones», «tréboles», «picas» y «diamantes». También la representación de los números con puntos constituyó antiguamente una ciencia: la ciencia de los *números figurados* de los pitagóricos (los discípulos de Pitágoras, que vivió en el s. VI aC., y del cual hablaremos más detenidamente). También es ésta, desde luego, una ciencia superada, pero siempre podemos sacar alguna conclusión interesante, de una forma sencilla y elegante, y con menos esfuerzo, quizá, que utilizando el *álgebra* (otro nombre árabe, que explicaremos más adelante).

Un ejemplo. Los pitagóricos denominaban a los números *triangulares*, *cuadrados*, *cúbicos*, etc., según originara dicho número, por la distribución regular de los puntos que lo representaba, un triángulo rectángulo «isósceles» (con los dos lados menores iguales), un cuadrado o un cubo. Los *números cuadrados* son, naturalmente, los *cuadrados de los números*. Por ejemplo $4 = 2 \times 2 = 2^2$ (dos al cuadrado), $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$, $25 = 5 \times 5$, etc., se representan con los siguientes cuadrados de puntos:

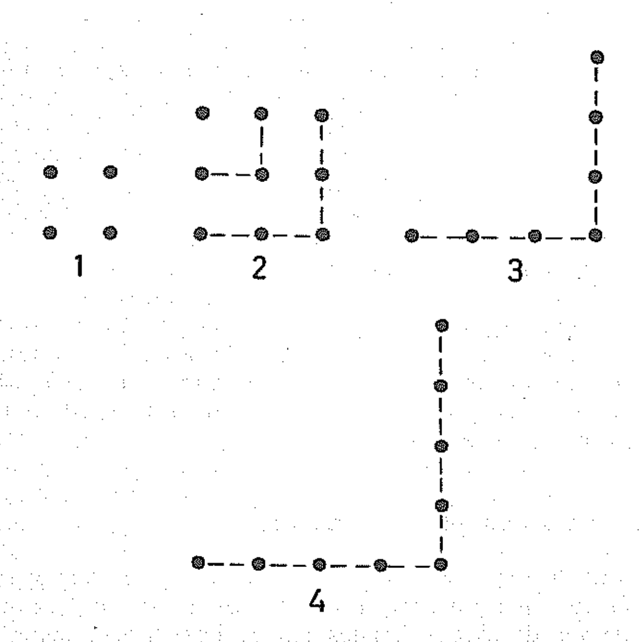


Figura 3

Ahora, en lugar de descomponer estos cuadrados de puntos en sus filas (o columnas), procedamos de la siguiente forma (ver figura 3): los dividimos en otras tantas líneas quebradas (como eles al revés, ⅃, o escuadras de dibujo) que partiendo de un punto de la primera fila, bajen en línea recta hasta la diagonal del cuadrado ,y luego doblen en ángulo recto para llegar, horizontalmente, hasta la primera columna. Entonces se puede ver en seguida, ya en los ejemplos dibujados al principio, que estas líneas quebradas están formadas (de izquierda a derecha) por 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., puntos. Se tiene entonces que:

El cuadrado de 2 es la suma de los dos primeros números impares ($1 + 3 = 4$); el cuadrado de 3 es la suma de los tres primeros números impares ($1 + 3 + 5 = 9$); el cuadrado de 4 es la suma de los cuatro primeros números impares ($1 + 3 + 5 + 7 = 16$); el cuadrado de 5 es la suma de los cinco primeros números impares ($1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$)... En general, si llamamos *N a un número entero cualquiera:*

El cuadrado del número entero N es la suma de los N primeros números impares.

Se puede decir de otra manera:

Se obtienen sucesivamente los cuadrados de los N primeros números enteros haciendo sucesivamente las sumas de los primeros 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... *N*, *números impares.*

Según esta regla hemos construido, en el apéndice núm. 3, los cuadrados de los primeros números. Naturalmente, se puede seguir hasta el número que interese.

Las modernas computadoras electrónicas prefieren la numeración «en base dos»

Nuestra numeración, es decir la india-árabe, es decimal, o lo que es lo mismo «en base diez». En efecto, está basada en la descomposición de un número en unidades, decenas, centenas, millares, decenas de millar, centenas de millar, etc. Ahora bien, cien es el cuadrado de diez (diez por diez), mil es el cubo de diez (diez por diez por diez), diez mil es la cuarta potencia de diez (diez por diez por diez por diez), y así sucesivamente. El valor de una cifra depende del lugar; un «uno» colocado en un lugar vale *diez* veces más que el mismo «uno» colocado en el lugar siguiente, y diez veces menos que un «uno» escrito en el lugar precedente. Se escribe, como

sabéis, 10^2, 10^3, 10^4 ,etc. (diez al cuadrado, diez al cubo, diez a la cuarta potencia, etc), para indicar las sucesivas *potencias* de diez; en general, si se indica con la letra n un número entero cualquiera, el símbolo 10^n indica el producto de n factores, todos iguales a 10, y se lee: 10 a la «enésima» potencia, ó 10 elevado a n, o también, más brevemente, «10 a la enésima».

Tomemos otro número, por ejemplo el número 5, y obtengamos sus sucesivas potencias: $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, etc. En vez de dividir un número, por ejemplo el número «ciento cincuenta y seis», en unidades, decenas y centenas, podemos dividirlo perfectamente en unidades, «cinquenas», «veinticinquenas» y «cientoveinticinquenas». Ciento cincuenta y seis es igual a:

$$125 + 25 + 5 + 1;$$

una «cientoveinticinquena» más una «veinticinquena» más una «cinquena» más una «unidad».

Supongamos ahora que en algún lejano planeta vive una estirpe de seres inteligentes con una sola mano, dotada de cinco dedos: podemos estar casi seguros de que los «Unímanos» escribirán el número ciento cincuenta y seis, o sea ciento veinticinco + veinticinco + cinco + uno, de este modo:

1 1 1 1.

Es decir, que ellos atribuyen a las cifras el siguiente valor de posición: en el último lugar la unidad, en el penúltimo des cinquenas, en el antepenúltimo las veinticinquenas, luego las cientoveinticinquenas, y así sucesivamente. Es decir, que partiendo de la base cinco procederán con las sucesivas potencias del cinco del mismo modo que nosotros, que estamos dotados de diez dedos, partiendo de la base diez procedemos para las potencias del diez. ¿Qué querrá decir para los «Unímanos» (o sea en «base cinco») la escritura 42?

Querrá decir dos unidades más cuatro cinquenas, o sea que querrá decir veintidós. ¿Y la escritura 2 2 3?

Naturalmente, sesenta y tres $= 3 + 2 \times 5 + 2 \times 25$. Para otros ejemplos y problemas, ver el apéndice núm. 5.

Los «Unímanos», naturalmente, tendrán muchas desventajas prácticas por el hecho de tener una sola mano y cinco

dedos menos que los hombres; pero a la hora de escribir los números tienen en cambio una pequeña ventaja, y también una desventaja. Vamos a ver en qué consisten. La desventaja, como habréis advertido, es que un número para el que en base diez son suficiente *dos* cifras, como el «setenta y tres», por ejemplo, ellos lo tiene que escribir con tres cifras (y a medida que avanzamos la diferencia se hace mayor); la ventaja es que sólo necesitan cinco símbolos, en lugar de los diez nuestros; sólo necesitan las cifras 0, 1, 2, 3, 4. Porque para ellos el cinco se escribe... 10 = una cinquena + cero unidades; seis se escribe 11, siete 12, mientras ocho se escribe 13, y nueve 14; y el número diez, entonces, se escribe... 20 (dos cinquenas, cero unidades); el quince se escribe 30 y el veinte 40, mientras que al veinticinco le corresponde ya el símbolo 100 (una veinticinquena, ninguna cinquena y ninguna unidad).

Se puede repetir el mismo juego tomando como *base* cualquier otro número, formando sus potencias sucesivas, y finalmente dividiendo otro número cualquiera en cierto número de unidades, de múltiplos de la base, de múltiplos del cuadrado de la base, etc. (ver apéndice núm. 5).

Siempre habrá quien diga: es un juego. Nosotros no somos «Unímanos», tenemos la costumbre de calcular por decenas, centenas, millares; es inútil que tratemos de embrollarnos con cinquenas y veinticinquenas. ¡Un momento! Es muy difícil que una conquista del hombre sea definitiva, eterna: por muy genial, por muy útil que sea, llega el momento en que otro descubrimiento le hace la competencia, por ser más útil, más cómodo, más sencillo que el anterior, por lo menos en cierto terreno. Algo parecido está ocurriendo con la numeración *posicional* en base diez. Setecientos cincuenta años después del librillo de Leonardo Pisano, y mil doscientos años después de la histórica embajada de los indios en la corte del Califa, la numeración posicional en base diez tiene una peligrosa rival, que probablemente no la suplantará nunca en las cuentas caseras, pero que ya ha ocupado su lugar en importantes cálculos ultramodernos: la numeración posicional en «base dos».

Hoy día se habla mucho de las maravillosas *computadoras electrónicas*. Se trata de máquinas que ocupan, con sus válvulas, sus circuitos y sus complicados y delicados engranajes, los estantes de una o varias grandes salas; son capaces de hacer, en unos minutos, cálculos que supondrían meses, y tal vez años, de trabajo para un equipo de hábiles matemáticos.

Pero, ¿en qué consiste la respuesta de las máquinas electrónicas a la pregunta que se les plantea? Se trata de una ficha perforada (ver figura 4).

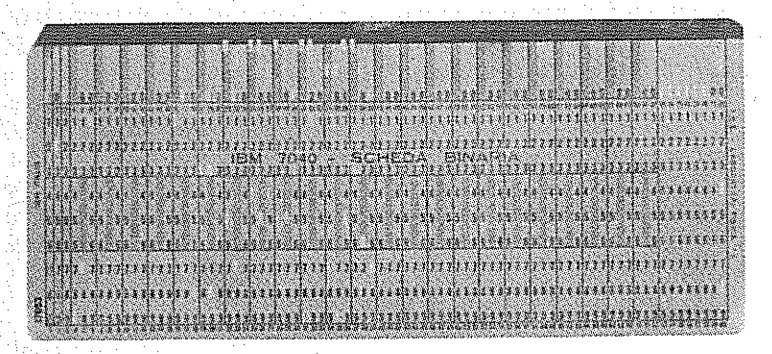


Figura 4

En efecto, por muy complicada e incomprensible que parezca, la máquina a fin de cuentas se limita a registrar si, en un instante dado, *pasa o no corriente*. Por lo tanto las posibilidades sólo son dos: pasa corriente, no pasa; *sí, no;* agujero, no agujero; o, si queremos utilizar las palabras que voy a escribir a continuación, en lugar de las anteriores: *uno, cero* (*uno* por ejemplo sería el *agujero, cero* la falta de perforación, o viceversa). En resumen, la pobre máquina sólo puede escribir dos cifras: agujero, o no agujero, *uno* o *cero*. Pero su respuesta tiene que ser un número: ¿Cómo se puede escribir un número cualquiera con sólo dos cifras?

Después de lo dicho, la cosa es bastante sencilla: habrá que escribir los números en «base dos» *(numeración binaria)*. Ya que las potencias sucesivas del dos son cuatro, ocho, dieciséis, treinta y dos, etc., habrá que descomponer el número en unidades, en pares, en cuartetos, en octetos y así sucesivamente. Y puesto que dos unidades hacen un par, de las unidades habrá que tomar o bien una (si el número es impar), o ninguna, si el número es par (y por tanto divisible en pares sin resto); puesto que dos pares hacen un cuarteto, de los pares habrá que tomar o uno, o ninguno, y así sucesivamente. Por lo tanto, para escribir un número basta con las cifras 0 y 1 (o si queréis, no «perforación» y «perforación» en la ficha). Pero estudiad el apéndice número 6: es más claro que una explicación general, necesariamente condensada.

2. Los triángulos

La ciencia más antigua es la geometría

La humanidad, a lo largo de su historia, ha estudiado las matemáticas en un orden inverso al que se sigue en nuestros centros de enseñanza, o casi. En efecto, la numeración decimal (arábigo-india) es la primera cosa que se aprende, en cuanto se va a la escuela, cuando en realidad ha sido —como hemos visto— una conquista tardía de una humanidad muy versada ya en *geometría*. Se podría incluso decir que la geometría es varios miles de años más antigua que la aritmética: sin lugar a dudas la geometría ha sido la primera verdadera ciencia construida por el hombre, la única verdadera ciencia de la antigua Grecia: ya adulta cuando la física, la química, la biología y la geología todavía no habían nacido, y la medicina daba sus primeros pasos. Sólo la astronomía estaba bastante desarrollada, pero ¿qué era la astronomía de los caldeos, de los egipcios, de los griegos, sino geometría?

Navegación implica astronomía y astronomía implica geometría: he aquí la razón por la que los antiguos pueblos navegantes del Mediterráneo tuvieran que convertirse en excelentes geómetras. Pero también arquitectura implica geometría; y sobre todo implica geometría la *agrimensura*. En efecto, *agri-mensura* es la traducción literal, en latín, del griego *geometría*: en español, medida (*metría*) del suelo (o sea de la tierra, que en griego se dice *gè*: recordemos a Gea, la diosa de la Tierra).

Los griegos tenían un verdadero culto por la geometría, que llevaron a un alto grado de perfección. La consideraron, como se suele decir hoy día, una ciencia formativa, es decir una ciencia que acostumbra al hombre a razonar, que afina la inteligencia; incluso decían que no había que estudiarla con fines prácticos, sino para el «honor de la mente humana». Platón, el gran filósofo discípulo de Sócrates, en su escuela (la Academia), donde se discutían los más difíciles problemas de la lógica, de la política, del arte, de la vida y de la muerte, había hecho escribir encima de la puerta: «No entre el que

no sea geómetra». También decía Platón que «Dios mismo geometriza», y probablemente con esto quería afirmar que el universo está constituido según formas y leyes geométricas. Este culto a la geometría como ciencia soberana, que es la clave para la comprensión de todo el universo, estaba aún muy vivo en el gran Galileo Galilei (1564-1642). He aquí lo que escribía Galilei: «Este grandísimo libro que continuamente tenemos abierto ante los ojos (hablo del universo)... no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, y a conocer los caracteres en los cuales está escrito. Está escrito en lengua matemática y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas...».

No obstante, la geometría griega permaneció fiel al significado literal de su nombre: los estudiosos griegos se ocuparon sobre todo de las medidas: medidas de longitudes, de áreas y de volúmenes. Para medir desarrollaron algunas teorías que aún hoy se aprenden en las escuelas más o menos de la misma forma en que fueron enunciadas hace dos mil doscientos años por Euclides: la ley de la *semejanza* y la ley de la *equivalencia*. Realmente no podemos hacer una exposición ordenada de ellas (por otro lado, ya se da en la escuela); pero querríamos, con algún ejemplo, hacer ver su alcance y su genialidad.

Tales mide la pirámide de Keops con un bastón, dos sombras y una idea

Cuando el sabio Tales de Mileto, hacia el año 600 a.C., se encontraba en Egipto, un enviado del faraón le pidió, en nombre del soberano, que calculara la altura de la pirámide de Keops. En efecto, corría la voz de que el sabio sabía medir la altura de construcciones elevadas, por arte geométrica, sin subir a ellas. Tales se apoyó en un bastón; esperó hasta que, a media mañana, la sombra de su bastón, mantenido en posición vertical, tuvo una longitud igual a la del bastón; entonces dijo al enviado: «Ve y mide rápidamente la longitud de la sombra de la pirámide: en este momento es tan larga como la misma pirámide».

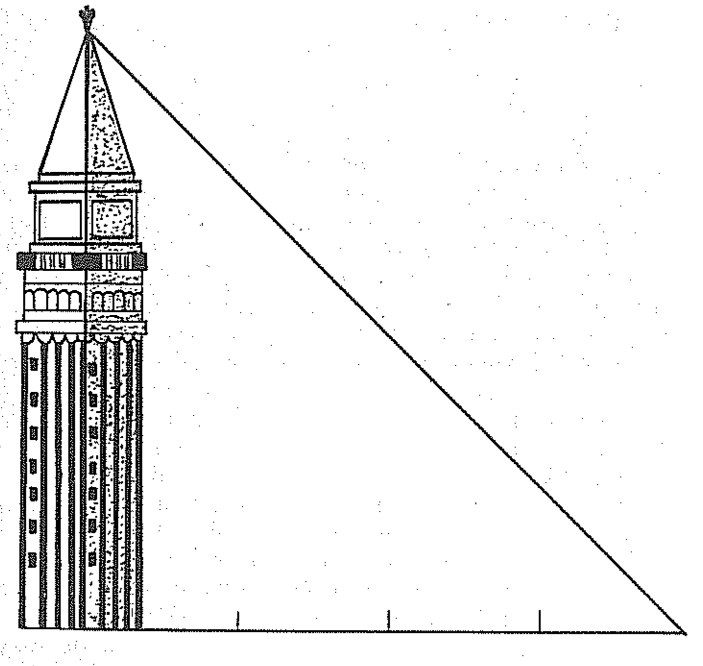
Para ser preciso, Tales tenía que haber dicho que añadiera a la sombra de la pirámide la mitad del lado de su base, porque la pirámide tiene una ancha base que roba una parte de la sombra que tendría si tuviera la forma de un palo fino y vertical; puede que lo dijera, aunque la leyenda no le refie-

re, quizá para no estropear con demasiados detalles técnicos una respuesta tan bella en su simplicidad.

Para no complicar las cosas, vamos a pensar en un campanario fino y afilado en lugar de una pirámide: tomemos un bastón, no importa de qué longitud, y a cualquier hora del día (¡siempre que no esté nublado!) dispongámonos a medir el campanario: con *un bastón, dos sombras* y *una idea*.

Supongamos, en primer lugar, que el campanario sea vertical, o sea erigido perpendicularmente al suelo, como el de San Marco, y que no esté inclinado como la Torre de Pisa o la Garisenda de Bolonia. Pongamos entonces también vertical nuestro bastón y midamos su sombra (con un metro, por ejemplo, o si queremos también con el mismo bastón, tomado como metro). Supongamos que encontramos que la sombra, por ejemplo, es dos veces más larga que el bastón. Entonces, también la sombra del campanario será en ese momento dos veces más larga que el campanario; para obtener la altura del campanario, bastará, pues, con medir su sombra con un metro, y dividir el número obtenido por dos. La explicación geométrica es la siguiente: el bastón vertical, su sombra y el rayo de sol que va de la punta del bastón al final de la sombra (ver figura 5) forman un triángulo rectángulo. El campanario vertical, su sombra y el rayo de sol que va de la cima del campanario hasta el extremo de su sombra forman otro triángulo rectángulo, que tiene la misma forma que el anterior, porque los ángulos son iguales en los dos triángulos (las sombras se han tomado en el mismo momento, por lo que los rayos solares tienen la misma inclinación). Por lo tanto, se trata de dos triángulos con la misma forma, o sea *semejantes;* el del campanario es por lo tanto *como* el del bastón, pero de mayor tamaño. Ya que los dos triángulos, como hemos dicho, tienen la misma forma, al pasar del más pequeño al más grande se tienen que respetar las proporciones: o sea que si la sombra del bastón es el doble del bastón, también la sombra del campanario será el doble del campanario. Si queremos podemos medir también sombra con sombra y altura con altura (campanario con bastón), en lugar de comparar cada altura con su respectiva sombra. Es decir, que se podría razonar así: «Si la sombra del campanario es cien veces más larga que la del bastón, entonces el campanario es cien veces más alto que el bastón». Se dirá entonces que las cuatro magnitudes: sombra del campanario, sombra del bastón, campanario y bastón están en *proporción* en el orden dado, y una frase como la que hemos puesto antes entre comillas asumirá la expresión mate-

mática más generalizada: «La sombra del campanario es al campanario como la sombra del bastón al bastón», por lo que se puede de una proporción obtener la otra, que tiene la misma validez que la primera, cambiando entre sí de lugar las magnitudes intermedias, la segunda y la tercera: es una de las reglas que permiten trabajar con proporciones, la llamada *permutación de los medios*.



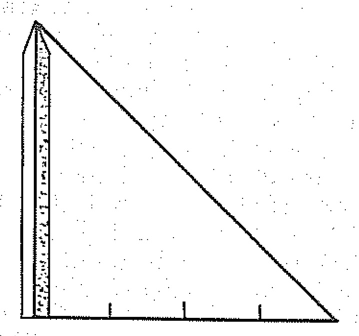


Figura 5

Pero no es necesario que los dos triángulos semejantes tengan un ángulo recto para establecer las proporciones de que hemos hablado entre sus lados. Basta con que cada ángulo de uno de los triángulos sea igual al ángulo correspondiente del otro triángulo. Así, el razonamiento que se ha hecho para un campanario vertical se puede repetir en el caso de la Torre de Pisa siempre que el bastón tenga la misma inclinación que la torre (ver figura 6).

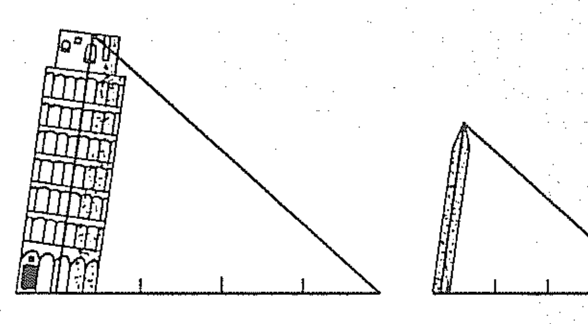


Figura 6

Resumiendo, en general «si dos triángulos tienen los ángulos iguales, los lados correspondientes están en proporción»: o sea, que si un lado de uno de ellos es igual a «tantas veces» el lado correspondiente del otro, entonces otro lado del mismo triángulo será igual a «tantas veces» el lado correspondiente del otro triángulo.

Historia y leyenda del teorema de Pitágoras

Los geómetras griegos llevaron a un grado altísimo de perfección técnica y lógica el estudio de las proporciones entre magnitudes, y particularmente la comparación entre figuras *semejantes*. Basaron en tal estudio no sólo el cálculo de longitudes desconocidas (como la altura de la pirámide de Keops), sino también el de las áreas de muchas figuras planas limitadas por rectas, o el de los volúmenes de los sólidos limitados por planos. Para comparar las áreas de dos figuras planas semejantes (o sea, de la misma forma) hay que comparar no ya los lados correspondientes, sino los *cuadrados* de los lados correspondientes. Un sencillísimo ejemplo es con-

vencerá de ello. Supongamos que *la escala de un mapa topográfico* sea tal que en él la longitud de un centímetro corresponda a la distancia real de un kilómetro. Tomemos dos cuadraditos del mapa: uno con el lado de un centímetro, y otro con el lado de dos centímetros. Son semejantes, porque tienen los ángulos iguales (cuatro ángulos rectos: todos los cuadrados son semejantes entre sí), y la *proporción* entre los lados es de uno a dos, es decir que cada lado del segundo es el doble del correspondiente lado del primero. Pero el segundo cuadrado se puede descomponer, no ya en dos cuadrados iguales al primero, sino en cuatro (ver figura 7), y por eso representa en el mapa una región que tiene el área no de dos, sino de cuatro kilómetros cuadrados.

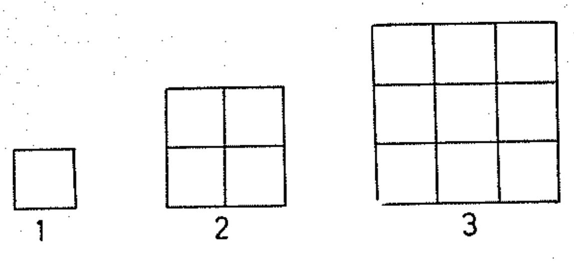


Figura 7

Así, si el lado del segundo hubiera sido tres veces el del primero, el área del segundo sería nueve veces el área del primero (ver figura 7). Pero nueve es el cuadrado de tres, así como cuatro es el cuadrado de dos: en general, *la relación de las áreas de dos cuadrados es el cuadrado de la relación de los lados.* La misma regla es válida para triángulos semejantes (sean o no rectángulos). Y es que si tengo dos triángulos (rectángulos) semejantes, el doble de los dos son dos rectángulos semejantes: entonces su relación será igual a la de los correspondientes rectángulos semejantes. (Pero esto se cumple también en *cualquier* triángulo semejante). La *ley de la semejanza* —lo repetimos— fue enunciada por los griegos con tal perfección que aún hoy se estudia en la escuela más o menos como la estudiaban los muchachos de Atenas o Alejandría en los *Elementos* de Euclides, hace dos mil trescientos años.

Sin embargo, estoy de acuerdo con los investigadores que piensan que en un primer momento los griegos realizaron el cálculo de las superficies por una vía más sencilla y natural que la que se basa en la comparación de figuras semejantes, y en general, en las proporciones. Tomemos un famoso ejemplo: el de Pitágoras y su teorema: «En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los dos catetos» (la hipotenusa es el lado más largo, el que se opone al ángulo recto; los catetos son los dos lados menores, «adyacentes» —o sea al lado— del ángulo recto). La leyenda dice que Pitágoras se dio cuenta del alcance de su demostración hasta el punto de ordenar una hecatombe, es decir, el sacrificio de cien bueyes a los dioses, en señal de agradecimiento y de alegría. Naturalmente, sobre el descubrimiento de Pitágoras no tenemos ni periódicos, ni libros, ni revistas de la época, porque en esa época no había ni periódicos, ni libros, ni revistas. Sólo nos han llegado leyendas, o mejor dicho historias contadas por escritores que vivieron varios siglos después.

Aun así, hay muchas razones que nos hacen creer la «historia de Pitágoras». A lo mejor no se llamaba Pitágoras ni sacrificó cien bueyes, sino uno solo, o a lo mejor ni siquiera sacrificó un corderillo, todo eso puede ser una leyenda. Pero que un estudioso de la Magna Grecia (con esta expresión se indicaban la Italia meridional y Sicilia), que vivió hacia el año 600 a C., haya demostrado, con un razonamiento general, la relación que hoy llamamos de Pitágoras entre los cuadrados de los catetos y el de la hipotenusa, para cualquier tipo de triángulo rectángulo, creemos que es un hecho histórico, o sea verdad. Sabemos con certeza que, muchos siglos antes de Pitágoras, en Egipto y en Caldea había conocidos ejemplos de triángulos rectángulos sobre los que se podía verificar prácticamente la relación mencionada anteriormente. Por ejemplo, si los dos catetos tienen de longitud 3 y 4 (metros o centímetros, etc., lo que se quiera tomar como unidad de medida), se verifica con la experiencia que, entonces, la hipotenusa mide 5 (con respecto a la misma unidad de medida). Después se comprueba que el cuadrado de 3 más el cuadrado de 4 es igual al cuadrado de 5, o sea que: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Sabemos además que en la época de Pitágoras, en las islas griegas y en la Magna Grecia, la geometría se transforma y pasa de ser un compendio de reglas prácticas y observaciones aisladas, a una ciencia racional, con razonamien-

tos generales sobre las figuras en general (y no ya sobre aquel triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 o sobre otro en particular, sino sobre todos los triángulos rectángulos).

Por lo tanto, Pitágoras —con o sin hecatombe— demostró realmente, sobre el 600 aC., que «la suma de los cuadrados de los dos catetos, en un triángulo rectángulo, es siempre igual, o, mejor dicho, *equivalente*, al cuadrado de la hipotenusa». Pero, aunque estemos convencidos de que fue Pitágoras quien lo demostró, nos preguntamos: ¿cómo lo demostró?

La demostración de Pitágoras, con dos descomposiciones distintas de un cuadrado

La demostración del teorema de Pitágoras que se suele estudiar en la escuela, no es ciertamente la de Pitágoras. En primer lugar, es demasiado difícil para la época de Pitágoras: además, sabemos, gracias a un tal Proclo, «comentarista» de los *Elementos* de Euclides, que tal demostración ha sido obra del mismo Euclides. ¿Entonces? La elección es difícil. En efecto, un matemático francés, Fourrey, que a principios de nuestro siglo se dedicó a recopilar todas las demostraciones conocidas del famoso teorema, consiguió reunir... unas cincuenta. Nosotros creemos, sin embargo, que tiene razón un matemático, sobre 1700, Bretschneider, quien afirmaba, que la demostración original de Pitágoras es la que vamos a exponer a continuación con la ayuda de dos figuras. En la primera figura tomamos el cuadrado que tiene por lado A + B, suma de los dos segmentos A y B, y lo dividimos en varias partes: el cuadrado del lado A, el del lado B, y dos rectángulos de lados A y B; dividiendo por la mitad, con la diagonal, cada uno de los rectángulos de lados A y B, obtenemos en su lugar *cuatro* triángulos rectángulos de catetos A y B.

En la segunda figura tomamos el mismo cuadrado, o sea el cuadrado de la suma A + B, de dos segmentos A y B, pero lo descomponemos (lo cortamos en pedazos) de una forma distinta. Nos resultan así *cuatro* triángulos rectángulos de catetos A y B, pero esta vez obtenemos además un *único cuadrado*, el que tiene por lado la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos A y B (para aquéllos que duden de que se trate de un cuadrado, ver *Respuestas a ciertas dudas*, apén-

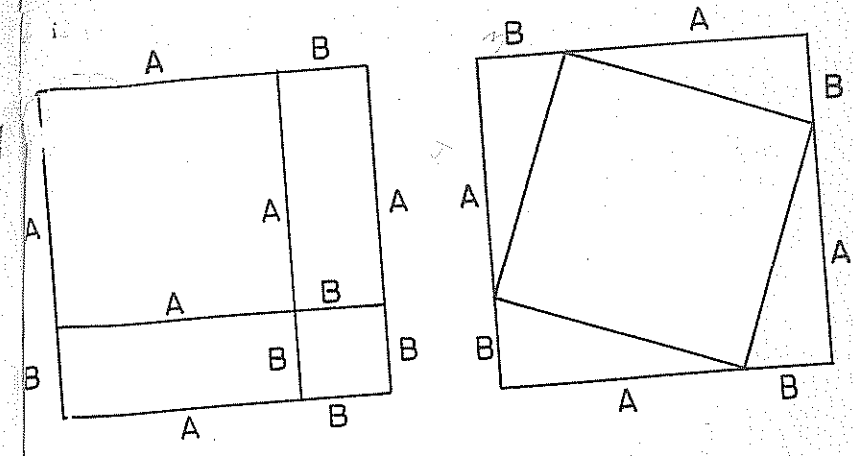


Figura 8

dice núm. 19). Tenemos entonces dos cuadrados iguales (los grandes, de lado A + B); si de ellos, tanto de uno como de otro, sacamos una misma superficie, la de los cuatro triángulos rectángulos con catetos A y B, las partes que nos quedan seguirán teniendo una superficie igual: pero las partes que nos quedan son, en la primera figura, la suma de los cuadrados de los catetos A y B, y en la segunda el cuadrado de la hipotenusa. El teorema de Pitágoras queda demostrado; probablemente, a la manera de Pitágoras.

3. Las medidas

Número y medida

Ya hemos dicho que la geometría es, ante todo, la ciencia de la *medida;* medida de longitudes, de áreas, de volúmenes. La primera y más sencilla medida es la de una longitud. Ya que la *medida es una comparación*, habrá que medir siempre una longitud con respecto a otra longitud (y por la misma razón una superficie con respecto a otra superficie, y un volumen con respecto a otro). Conviene fijar de una vez por todas una de las dos longitudes, o sea comparar una longitud cualquiera con otra longitud fija que siempre será la misma. Es conveniente, en una palabra, fijar una unidad de medida, un metro. Mientras los intercambios y las relaciones culturales entre los países fueron escasos, en cada país se usaban metros distintos: por ejemplo, *pulgadas, pies, yardas y millas* en Inglaterra, *archinas* y *verstas* en Rusia, *codos, estadios y millas* en la antigüedad clásica, y así sucesivamente. Con el desarrollo del comercio, de las comunicaciones, de los intercambios culturales, y sobre todo gracias a los científicos, en el siglo pasado se fijaron algunas unidades de medida internacionales, e incluso se ha fundado una oficina internacional de pesos y medidas, que tiene su sede en París. En esta oficina hay una *longitud-patrón*, aquélla con respecto a la cual se tienen que medir todas las demás: el *metro* por excelencia, una barra de platino que es, aproximadamente, la cuarenta millonésima parte del meridiano terrestre.

Una vez fijado el metro, se determina la medida de una longitud (o segmento) con las siguientes operaciones:

1. Se hace coincidir el inicio del metro con el inicio del segmento; luego se superpone el metro al segmento y se señala el punto del segmento que coincide con el final del metro; se vuelve a realizar esta operación a partir de este nuevo punto, y se repite hasta que el final del metro coincide con el final del segmento, o bien el trozo de segmento que sobra es menor que el metro. En el primer caso, si por ejemplo el metro

se ha «trasladado» exactamente cinco veces, y no hay «resto», se dirá que la medida del segmento es de 5 metros exactos.

En el segundo caso, en cambio, supongamos que después de haber superpuesto el metro cinco veces, nos quede un pedazo de segmento más corto que el metro: entonces diremos que el segmento es más largo que 5 metros, pero menos que 6 metros. En este caso 5 metros es una de sus medidas *aproximada por defecto*, mientras que 6 metros es la *medida aproximada por exceso*: la aproximación se hace «a menos de un metro».

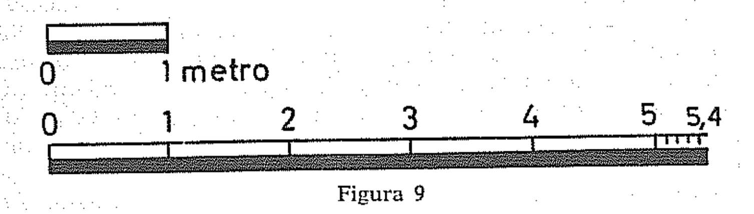


Figura 9

2. Si hay un resto, más corto que un metro, se mide con la décima parte del metro, el *decímetro*. Si el trozo que sobra se puede medir exactamente con el decímetro, hemos terminado, porque hemos encontrado la medida exacta en metros y en decímetros. Por ejemplo, en nuestro caso, si el resto se cubre exactamente con 4 decímetros, uno tras otro, la medida exacta será 5 metros y 4 decímetros: 5,4 metros. Si todavía nos queda un resto, esta vez más corto que un decímetro, en metros y decímetros sólo tendremos una medida aproximada; por ejemplo, *más* de 5,4 metros, *menos* de 5,5. Entonces tratamos de cubrir exactamente el nuevo resto con cierto número de *centímetros*, o sea décimas de decímetros. Si lo logramos, habremos terminado, y si no quedará un nuevo resto, que trataremos de cubrir exactamente con cierto número de décimos de centímetro, es decir con milímetros...

Y así sucesivamente, hasta que...

¿Hasta cuándo? En la práctica, hasta que el resto sea despreciable con respecto a la finalidad que nos proponemos con la medida. Si hay que medir una carretera larga y rectilínea, los decímetros ya se pueden desechar; si medimos una estatura, en general desechamos los milímetros; el obrero que tiene que fabricar engranajes y mecanismos muy precisos, tendrá que ser exacto quizá hasta la décima de milímetro; el científico en su laboratorio no debe olvidar ni siquiera las *micras*,

milésimas de milímetro. Sin embargo todos ellos, ya sean agrimensores u obreros, técnicos o científicos, llegados a un cierto punto se paran, se conforman con una aproximación. Todos, excepto el matemático.

Al matemático no le interesa el resultado de utilidad práctica, sino el procedimiento de la medida. El matemático se pregunta: «¿Debe pararse este procedimiento a partir de un momento dado? ¿Hay que llegar en cualquier caso a la medida exacta, aunque sea con millones de cifras decimales? ¿O es que hay casos en que tendremos un sobrante, cada vez más pequeño, hasta el infinito?».

Los matemáticos han encontrado una respuesta a su problema. La respuesta puede resultar sorprendente: hay longitudes que no se pueden medir exactamente por un metro determinado, ni siquiera recurriendo a milmillonésimas de metro, o a partes de metro aún más vertiginosamente pequeñas. Es preciso, pues, introducir una gran división con dos categorías de longitud, en relación a un metro determinado:

1.ª *categoría*. Longitudes (segmentos) que se pueden medir exactamente, aunque sea recurriendo a décimas, centésimas, milésimas y a los sucesivos «submúltiplos» decimales del metro. Los segmentos de esta primera categoría se llaman *conmensurables* con el metro: su medida es un número decimal que siempre se puede reducir a una fracción, o sea a un *número racional*, aun cuando en ocasiones sea *periódico* (se llama así un número decimal con infinitas cifras que, a partir de un punto determinado, se repiten en grupos iguales entre sí). En resumen, si habiendo dividido el metro en un cierto número, n, de partes, el segmento contiene m de estas partes, entonces su medida con respecto al metro, o sea la *relación* del segmento con el metro, es la fracción m/n.

2.ª *categoría*. Longitudes (segmentos) para los cuales necesariamente nos tenemos que conformar con una medida aproximada con respecto al metro. Los segmentos de esta segunda categoría se llaman *inconmensurables* con el metro. Su medida conduce a una sucesión sin fin (y no periódica) de cifras decimales; se trata, en suma, de un número con infinitas cifras decimales y no periódico, un *número irracional*.

Estos profundos resultados son debidos al pensamiento de los antiguos griegos. La primera demostración de la inconmensurabilidad de dos segmentos se remonta hasta Pitágoras, con la demostración de que en un cuadrado la diagonal

no se puede medir exactamente (con una fracción) tomando el lado como metro. La demostración puede entenderla cualquier muchacho inteligente; de todas formas, para no interrumpir el hilo de nuestro razonamiento, la dejamos aparte (ver apéndice núm. 8). Una teoría completa y rigurosa de las relaciones entre los segmentos es obra y gloria de Euclides y de su genial predecesor Eudoxo.

Las dificultades importantes comienzan con las líneas curvas

Vemos que incluso la medida de un segmento de recta presenta una serie de dificultades, y conduce a problemas arduos y a descubrimientos inesperados.

Pero aún así se perfila con claridad la idea fundamental, la de la comparación entre el segmento de una línea recta y un metro lineal, rectilíneo, mediante sucesivas superposiciones. Pero, ¿cómo abordar la cuestión cuando tenemos, en cambio, que medir con un metro rectilíneo una línea curva?

La primera idea que nos viene a la cabeza es tomar un metro flexible, por ejemplo una cuerda de un metro de longitud. Es ésta la primera idea que se les ocurrió a los hombres para medir la longitud de la línea curva más sencilla, y en cierto sentido la más importante de todas: la *circunferencia*. Tenemos un documento de ello muy fidedigno, nada menos que en el *Primer Libro de los Reyes*, de la Biblia, donde se habla del templo construido por Salomón en Jerusalén, entre 1014 y 1007 aC. El rey Salomón construyó una gran pila de bronce, circular, «de 10 codos de borde a borde», o como diríamos nosotros, de diez codos de diámetro (el codo era una medida de longitud aproximadamente igual a medio metro). «Una cuerda de 30 codos la rodeaba por completo.» Según el *Libro de los Reyes*, por lo tanto, la circunferencia (el «contorno») de un círculo es el triple de su diámetro (30 es igual a tres veces 10). Vemos que el error es bastante grande: podríamos decir que es un error... codal, porque, precisamente, midiendo con más atención, se habría visto que al dar la vuelta a la pila de Salomón había que añadir otro codo de cuerda, y para ser exactos otros cuatro décimos de codo, y luego un trocito más.

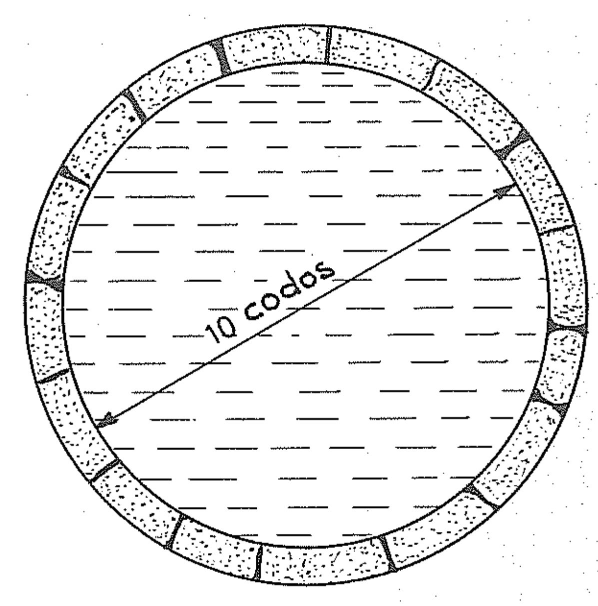


Figura 10

El sistema de la cuerda para medir la circunferencia es muy imperfecto, debido a las inevitables aproximaciones en las operaciones de medida, y no nos permite medir con más exactitud que con centímetros o milímetros: el sistema no sirve para establecer la medida, todo lo aproximada que queramos, de cada circunferencia en «metros-diámetros» (es decir, tomando el diámetro como metro o unidad de medida). Nos encontramos en el mismo caso desgraciado de antes (ver apéndice núm. 8), cuando intentábamos medir la diagonal de un cuadrado con el «metro-lado». En efecto, veamos cuántos diámetros entran en una circunferencia: son tres, pero sobra un trozo más corto que el diámetro. Midamos este primer sobrante en décimas de diámetro: cabe una décima de diámetro, pero aún sobre una porción más pequeña que la décima de diámetro. Midamos este segundo sobrante en centésimas de diámetro: entran cuatro, pero todavía sobra un trozo de circunferencia, más corto que una centésima de diámetro.

Llegados a este punto, si no tenemos a nuestra disposición unos instrumentos de medición muy precisos, deberemos detenernos porque lo que sobra es demasiado pequeño para

nuestros sentidos, a no ser que el diámetro, y por lo tanto la circunferencia en cuestión, sean gigantescos. Pero podemos seguir con el pensamiento y el razonamiento, y podemos demostrar (aunque resulte demasiado difícil de explicar para esta sencilla historia) que siempre habrá un resto, cada vez más pequeño al ir avanzando en la medida, por muy pequeñas que sean las fracciones de diámetro empleadas, y por consiguiente por mucho que se reduzca ese resto.

Una idea genial de Arquímedes

Todos, hasta los niños, han oído alguna vez hablar de Arquímedes. También es sabido que Arquímedes murió, en el 212 aC., cuando los romanos conquistaron su ciudad, Siracusa, que él, según la leyenda, había defendido ingeniosamente con los famosos *espejos ustorios*, que concentraban los rayos solares sobre las naves romanas y las quemaban, y con otros mil artificios, que (siempre según la leyenda, por boca del historiador Plutarco) habían aterrorizado a los romanos. Cuando los soldados romanos invadieron por fin la ciudad, Arquímedes estaba absorto meditando sobre algunas figuras que había trazado con el dedo en el polvo de la calle: un soldado invasor estaba a punto de tocarlas con el pie, y entonces Arquímedes se encaró con él diciéndole: «*Noli tangere circulos meos!*» (no toques mis círculos). El soldado, enfurecido, lo mató (y es que además los romanos, al contrario que los griegos como es sabido, eran excelentes soldados pero malos matemáticos).

Quizá se trate de una leyenda. Pero en toda leyenda hay algo de verdad. Arquímedes reflexionando sobre el círculo, tan absorto en su reflexión que no se da cuenta de los incendios y saqueos que se producen a su alrededor: esto es verdad. A lo mejor es la verdad de la poesía, que sin embargo no es menos verdadera que la de las tomas en directo de la televisión; y, muy a menudo, más verdadera, incluso.

Pero lo cierto es que Arquímedes (quizá el genio científico más grande de todos los tiempos) fue el primero que se enfrentó de un modo sistemático y racional (¡no con un cordel, sino con la mente!) al problema de la medida de la circunferencia con respecto a su diámetro tomado como unidad de medida. He aquí otro bello ejemplo de la importancia del método. En el fondo, bajo el punto de vista numérico, el resultado que Arquímedes expone en su obra *Acerca de la medida del círculo* no es mucho mejor del que se podría obtener midiendo una circunferencia con un cordel de la longitud del diámetro. Veamos el resultado, en palabras del mismo Arquímedes:

«La circunferencia de un círculo es igual al triple del diámetro más cierta porción del diámetro que es más pequeña que 1/7 del diámetro, y más grande que 10/71 del mismo diámetro.»

Dividamos 1 por 7: obtenemos un número decimal (periódico) cuyas primeras cifras son: 0,142..., o sea un número mayor que 142/100; por eso la circunferencia es menor que 3,142 veces su diámetro. Dividamos 10 por 71: obtenemos un número decimal cuyas primeras cifras son 0,140; por eso la circunferencia es mayor que 3,140 veces su diámetro.

Estamos ya acostumbrados a escribir en cifras decimales el *número de Arquímedes*, el famoso π («pi griega») que nos dice, precisamente, cuántas veces el diámetro está incluido en la circunferencia (π es la *relación* entre la circunferencia y el diámetro). La «traducción» de las fracciones 1/7 y 10/71 a los decimales 0,142 y 0,140 nos dice, por tanto, que el número π es mayor que 3,140... y más pequeño que 3,142... El valor aproximado que nos sugiere Arquímedes es el medio: 3,141...

Se trata de un paso adelante muy pequeño en los cálculos (una cifra decimal exacta de más); pero se trata de un paso adelante enorme en el pensamiento. En primer lugar, puesto que Arquímedes razona con todos los círculos posibles y no mide éste o aquél círculo con el «metro-diámetro», podemos estar seguros de que el número de veces que el diámetro está contenido en la circunferencia de su círculo es siempre el mismo (de lo que no estaríamos seguros ni siquiera después de realizar diez mil pruebas con diez mil círculos, porque los círculos no son diez mil, sino infinitos). En segundo lugar, el método de Arquímedes (que explicaremos a continuación) permite encontrar todas las cifras decimales exactas del número π que se quiera, siempre que se tenga la paciencia de llevar adelante unos cálculos cada vez más engorrosos. La idea de Arquímedes, como suele ocurrir, es genial porque es sencilla. En primer lugar inscribe en una circunferencia un *polígono regular* de 6 lados (exágono regular) dividiendo la circunferencia en 6 arcos iguales; después otro regular de 12 lados (dividiendo por la mitad cada ángulo formado por dos radios consecutivos del exágono), después uno regular de 24 lados, luego de 48, luego de 96, dividiendo siempre por la mitad los ángulos y sus respectivos arcos de circunferencia (ver

las figuras 11 y 12). Los perímetros de estos polígonos están todos encerrados dentro de la circunferencia, y son más pequeño que ella: la diferencia disminuye a medida que aumenta el número de lados (ni siquiera hemos dibujado los polígonos inscritos de 48 y de 96 lados, porque el dibujo resultaría demasiado confuso). Ahora bien, ese 3,140... = 3 + 1/7 veces el diámetro, es precisamente el perímetro (el contorno) del polígono regular de 96 lados inscrito (es decir, trazado dentro

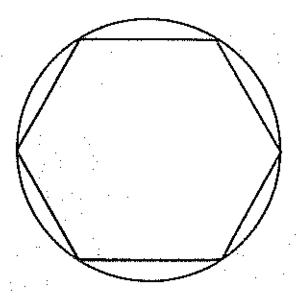
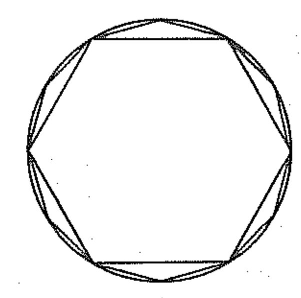



Figura 11

de la circunferencia y con los vértices en ella), mientras que ese 3 + 10/71 veces el diámetro, es la medida del polígono regular de 96 lados circunscrito (o sea con todos los lados tangentes a la circunferencia). Para los polígonos circunscri tos se hace el mismo razonamiento que para los inscritos. Pero en el caso de los primeros, cuanto mayor es el número de lados más pequeño se hace el perímetro; también en ellos, al aumentar el número de lados su perímetro se aproxima cada vez más a la circunferencia, confundiéndose con ella... si el número de lados tiende a ser *infinito.*

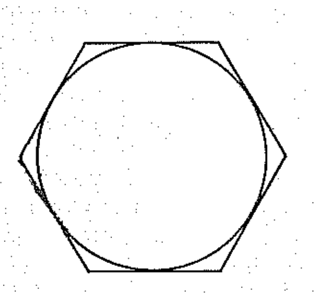
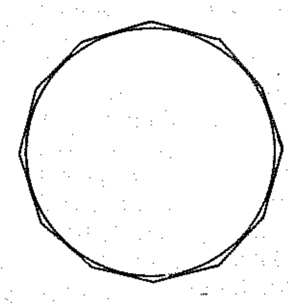



Figura 12

Los romanos conquistaron Siracusa, pero no se apoderaron del método de Arquímedes, que en cambio fue perfeccionado en la lejana India, tres siglos más tarde, por Aryabhatta, un gran matemático del siglo I dC. Aryabhatta da para π el siguiente valor:

$$\pi = \frac{62.832}{20.000} = 3{,}1416$$

Se trata de un valor tan aproximado que es el que aún hoy se emplea en la práctica (es aproximado *por exceso;* el valor exacto es más pequeño: 3,14159...) ¿Cómo se las había arreglado para obtenerlo aquel matemático indio de tan difícil nombre? Había ido más allá, tomando los polígonos reguladores de 192 (o sea, dos veces 96) y 384 (dos veces 192) lados.

Tomando el diámetro igual a 100 (metros, por ejemplo, o centímetros, o lo que queráis) iba encontrando para la longitud de los perímetros (medida con respecto al diámetro, igual a 100) de los polígonos regulares inscritos de 6, 12, 24, 48, 96, 192 y 384 lados, los siguientes valores:

para el polígono de 6 lados $\sqrt{90.000}$
para el polígono de 12 lados $\sqrt{96.461}$
para el polígono de 24 lados $\sqrt{98.133}$
para el polígono de 48 lados $\sqrt{98.555}$
para el polígono de 96 lados $\sqrt{98.661}$
para el polígono de 192 lados $\sqrt{98.687}$
para el polígono de 384 lados $\sqrt{98.694}$

Ahora bien, $\frac{\sqrt{98.694}}{100} = 3{,}1416$. Podemos solamente controlar con facilidad que $\sqrt{90.000}$ es la medida del perímetro del exágono regular (con respecto al diámetro): 90.000 es el cuadrado de 300, por lo que $\sqrt{90.000} = 300$. Ya que se ha tomado el diámetro igual a 100, la relación entre el perímetro del exágono regular inscrito y el diámetro es 3. Todo concuerda pues, como han estudiado los mayores en la escuela, el lado del exágono regular inscrito es igual al radio, o sea a la mitad del diámetro, que en nuestro caso es 50; el perímetro es seis veces el lado, o sea 300, y las cuentas nos salen.

Un tramo de curva «infinitamente pequeño», ¿es un tramo de recta?

Ya hemos dicho que, si tratamos de dibujar en el espacio normal de una página de libro un polígono regular de gran número de lados, por ejemplo el que hemos nombrado de 384 lados, inscrito en una circunferencia, los lados del polígono no se distinguirían bien de los correspondientes 384 pequeños arcos en que se dividiría la circunferencia. Imaginemos, lo que sucede si tratamos de dibujar en la misma página un polígono regular de un millón de lados inscrito en una circunferencia, con un diámetro, por fuerza, de diez o como máximo veinte centímetros, ya que si no, no cabe en la página. El pequeñísimo lado del polígono sería tan pequeño que estaría contenido en el espesor del trazo del lápiz o del bolígrafo con que dibujamos el círculo. Y es que en la práctica no podemos trazar líneas ideales, sin anchura, sin espesor. Por eso en la práctica un pequeño segmento de recta, que sea lo bastante pequeño, se confunde con el arco de una circunferencia lo bastante grande que pase por sus extremos. Lo mismo se puede decir para cualquier curva, por muy... curvada que esté.

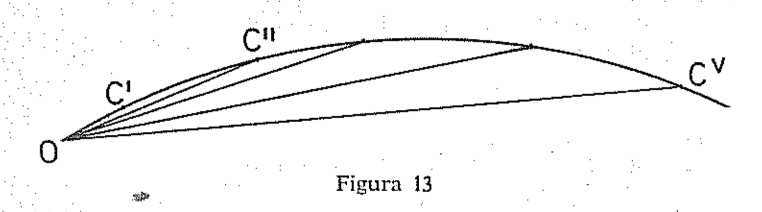


Figura 13

Si una curva está poco curvada, un arco suyo bastante grande ya no se separá mucho del tramo de recta (segmento) que une sus extremos; pero, por muy curvada que esté, siempre será posible dividirla en pequeños arcos, lo bastante pequeños como para que se aproximen lo que se quiera a los correspondientes segmentos qué unen los extremos de los pequeños arcos, o sea a las correspondientes *cuerdas*. Por lo tanto, en la práctica se obtendrá un valor aproximado de la longitud de un tramo cualquiera de curva dividiéndolo en gran número de arquitos, y midiendo cada una de las cuerdas para hacer luego la suma de las medidas obtenidas. Cuanto más pequeños sean los arcos en que se subdivide la curva,

tanto más la *poligonal*, o sea la línea quebrada que forman las cuerdas, se aproximará a la curva, y tanto más pequeño será el error que se cometa tomando como medida de la curva la de la línea poligonal.

De acuerdo hasta aquí. Pero, ¿y la medida exacta de la longitud de la curva? ¿Se puede obtener con este procedimiento? Para obtenerla, tendremos que imaginar que dividimos la curva, no ya en *muchos* arcos muy pequeños, sino en *infinitos* arcos infinitamente pequeños; tendremos que imaginarnos la circunferencia, por ejemplo, como un polígono regular de infinitos lados puntiformes, y por tanto tan pequeños que no se puedan dividir por la mitad: es decir, indivisibles.

He aquí una idea que, si lo pensáis bien, no es muy difícil de entender y resulta muy atractiva. La idea es en realidad muy antigua, pero justo porque la geometría griega estaba muy desarrollada y perfeccionada, no podía ser aceptada por los griegos de esta forma tan poco precisa, tan imaginativa. Infinitos lados infinitamente pequeños: se trata de una frase que suena bien, pero ¿qué significado preciso tiene? Los griegos no querían que en geometría se usaran términos que no estuvieran bien definidos, y por eso no admitían que se introdujera en los razonamientos algo tan vago e indeterminado como el infinito: lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. Como siempre, las actitudes mentales demasiado rígidas no son las más adecuadas, son poco fecundas. Los griegos (mejor dicho, como veremos, aquellos griegos) que no querían que se razonara con el infinito, tenían muy buenas razones de su parte; pero en realidad el mérito de uno de los mayores progresos de las matemáticas, y por lo tanto del pensamiento humano, lo tienen esos otros griegos, esos estudiosos medievales y esos científicos del Renacimiento que tuvieron la valentía de trabajar con un número infinito de magnitudes infinitamente pequeñas. Creemos que, poniendo un poco de atención, se pueden entender algunos de estos audaces intentos: por lo menos los primeros, aquéllos que tienen un carácter más geométrico, más intuitivo.

Recubramos una región plana con hilos. Rellenemos un sólido con hojas

Se entenderá mejor el asunto si en vez de hablar de la longitud de las curvas, hablamos del área de las superficies planas y del volumen de los sólidos. Si tenemos una porción

de plano delimitada por una curva cerrada regular (por ejemplo, un círculo), podemos imaginar que está formada por un tejido de hilos paralelos, infinitos e infinitamente finos. Así también, si tenemos un sólido contenido en una superficie «regular» (por ejemplo una esfera, un cilindro o un cono), podemos imaginar que está compuesto de infinitas hojas, infinitamente finas, superpuestas o estratificadas. En el caso de una figura plana, podemos también imaginar que el tejido sea más de «fantasía», como se dice en el lenguaje de la moda. Por ejemplo, si tenemos un círculo lo podemos imaginar compuesto por esos infinitos hilos circulares infinitamente finos que son las circunferencias concéntricas, o sea con el mismo centro que el círculo, y un radio cada vez más pequeño, como ciertos delicados centros de mesa finamente bordados: pero con la diferencia de que un centro de mesa, por muy finamente bordado que esté, estará formado por un cierto número, finito, de hilos circulares con cierto espesor, y no por infinitos hilos de infinita delgadez. He aquí como podemos, a partir de esta descomposición y en un santiamén, *cuadrar el círculo*, una vez que se sepa *rectificar la circunferencia*. Supongamos, pues, que sabemos rectificar la circunferencia, o sea que sabemos formar una porción de recta de longitud igual a la de la circunferencia. Arquímedes nos ha enseñado a hacerlo. en efecto, sabemos que dada una circunferencia cualquiera, su longitud es igual a la de un segmento π veces el diámetro. Observemos la figura.

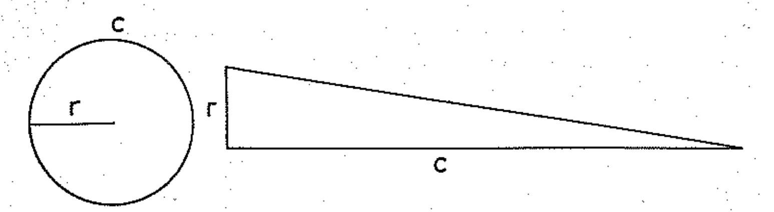


Figura 14

En ella, la base del triángulo es la circunferencia, que está rectificada, es decir estirada, mientras que la altura es el radio; cada hilo paralelo a la base con que está tejido el triángulo tiene, como puede verse, la misma longitud que uno de los hilos circulares que forman el tejido del círculo (el que quiera verlo más claro, con los ojos de la mente, que vea al final el apéndice 19, núm. 2). Pero entonces el área del triángulo es igual que la del círculo, porque ambos están formados por los mismos hilos de la misma longitud. Ahora bien, el triángulo tiene por base $\pi d = 2 \pi r$, siendo d y r el diámetro y el radio de la circunferencia; pero el área del triángulo es (base $\times$ altura)/2. Y por lo tanto en nuestro caso: $2 \pi r \times \times r/2$, o sea πr^2. En definitiva:

«*El área del círculo es igual al cuadrado del radio multiplicado por el número de Arquímedes 3,14159...*» Extraño razonamiento, resultado exacto. Este razonamiento es obra del matemático judío Abraham Savasorda, que vivió en Barcelona en el s. XI dC. (en esa época España estaba bajo el dominio o la influencia de los árabes, que en cuestión de matemáticas eran desde luego más competentes que el valiente Roldán).

Damos aparte un ejemplo, más difícil de entender, del cálculo de un volumen de un sólido al que suponemos formado por infinitas hojas infinitamente delgadas y prensadas todas juntas (ver: *La escudilla de Luca Valerio*, apéndice núm. 9). También en este ejemplo el extraño procedimiento de las infinitas partes «indivisibles», hilos u hojas, conduce a un resultado exacto.

Pero las cosas no van siempre sobre ruedas. Aquellos audaces que, como dice fray Buenaventura Cavalieri, afrontaron con su barquichuela «el océano de la infinidad de los indivisibles», encontraron muchos escollos. Se dieron cuenta, por ejemplo, de que las cuentas salen si los hilos (como en el ejemplo de Savasorda) no se cortan entre sí, pero en cambio se obtienen resultados completamente equivocados si los hilos se entrelazan, ni sea en un solo punto.

Fueron necesarios mil ochocientos cincuenta años para inventar de nuevo el método de Arquímedes

Este nuevo método, para medir las áreas de las figuras planas y los volúmenes de los sólidos, fue dado a conocer por primera vez por un gran discípulo de Galileo Galilei, aquel Buenaventura Cavalieri, que hemos citado antes, en un libro estupendo titulado *Geometria de los indivisibles*, editado en el 1635 (escrito en latín, la lengua internacional de los estudiosos hasta hace unos doscientos años). Hubo terribles discusiones entre los matemáticos acerca de los *indivisibles* de

Cavalieri; especialmente empecinado fue otro fraile, un holandés llamado Guldin, que era un excelente geómetra, pero muy tradicional, y no quería oír hablar de nada infinitamente grande o infinitamente pequeño. El bueno de Guldin y con él muchos adversarios de Cavalieri, se basaban en la autoridad del gran Arquímedes, quien en las publicaciones geométricas conocidas hasta entonces se había mantenido siempre fiel al purísimo método de Euclides y nunca se le había pasado por la cabeza dividir los sólidos en hojas y las figuras planas en hilos.

Pasaron unos tres siglos. Un científico, J. L. Heiberg, leía, en 1906, la lista de los manuscritos antiguos conservados en la Biblioteca Jerosolimitana de Constantinopla, con una breve noticia de su contenido. Una de estas informaciones le llama la atención. ¿Se trata quizá de los trabajos de Arquímedes? Escribe, se hace enviar unas fotografías de algunas páginas, y ya está fuera de dudas: se trata de un precioso manuscrito griego antiguo, en pergamino, quizá del 900 dC., con escritos de Arquímedes. Heiberg va a Constantinopla y con gran trabajo descifra el documento, porque alguien, hacia el 1300, había querido volver a utilizar el mismo viejo pergamino borrando lo de Arquímedes para escribir cosas de poco interés. Encuentra algunos escritos ya conocidos, como el libro sobre la *Medida del círculo* del que ya hemos hablado, y hacia el final, en las últimas hojas, descubre una obra de Arquímedes que se creía perdida: una carta que había viajado dos mil doscientos años antes desde Siracusa a Alejandría. O sea que descubre una copia de la carta que le escribió Arquímedes a Erastótenes, que dirigía la famosa biblioteca de Alejandría, y era él también un gran científico (fue el primero en medir, con bastante aproximación, un poco con un «metro» y mucho con la mente, el meridiano terrestre). En esa carta, Arquímedes le explicaba a Erastótenes el método que había empleado para «hacerse una idea» de las medidas de las superficies y de los sólidos, que después había justificado con los métodos rigurosos de la geometría griega. Se trataba de un procedimiento mecánico, que consistía —¡atención!— en la subdivisión de una superficie plana en infinitos hilos infinitamente delgados, con peso, y en la recomposición con los mismos hilos, dispuestos de otra manera, de otra figura más sencilla que estuviera equilibrada con la primera, una vez colocadas las dos en los platillos de una balanza ideal. Para los sólidos Arquímedes utilizaba un método análogo, subdividiéndolos en infinitas hojas, con peso, pero infinitamente delgadas. Fray Buenaventura triunfaba sobre Guldin: ¡el método de los «indivisibles» se remontaba a Arquímedes!

Ahora ya se puede entender mejor por qué nos hemos arriesgado antes a definir a Arquímedes como el más grande genio científico de todos los tiempos. Sólo a él, a Arquímedes, le ha sucedido un hecho tan extraordinario: que hicieran falta mil ochocientos cincuenta años (los que han pasado desde el 212 aC hasta el 1635 dC), para que otros científicos lograran redescubrir un método ideado por él, que permaneció oculto en un pergamino antiguo.

La matemática moderna sólo tiene trescientos años

¿En 1635, pues, los geómetras sólo habían llegado, tras el largo sueño científico de la Edad Media, al punto de llegada de la ciencia antigua, al método de Arquímedes? En cierto sentido, sí, y en otro, no. Sí, si nos fijamos sólo en los resultados de la geometría hasta Buenaventura Cavalieri; no, si nos fijamos en el penoso desarrollo del pensamiento matemático. Aunque no hubieran avanzado apenas en los resultados, sí que lo habían hecho en cuanto a posibilidades y como mentalidad. Durante un largo período de decadencia y de letargo científico de la civilización europea, los indios y los árabes habían elaborado la *aritmética* y el *álgebra*.

Por lo tanto, los hombres del Renacimiento tenían a su disposición todo lo necesario para lograr el gran progreso definitivo con respecto a la ciencia griega, que, como veremos, tuvo lugar efectivamente entre los siglos XVI y XVII.

4. Los símbolos y los nuevos números

También «álgebra» es una palabra árabe

Aritmética es una palabra griega (quiere decir ciencia de los números, *arithmòs* en griego significa número); hemos visto, sin embargo, que nuestra forma de escribir los números, y por consiguiente nuestra forma de hacer con ellos las cuatro operaciones, y los cálculos en general, no se remonta a los antiguos griegos sino a los mucho más modernos árabes. No se trata, pues, de una ciencia tan antigua como se pueda creer: en efecto, si queremos fijar las fechas, llegaremos a poco más de mil años de antigüedad en lo que se refiere a los árabes, con el sabio al-Khuwarizmi, que vivió alrededor del 800 dC, e incluso al siglo XIII para el caso de Europa, con Leonardo Pisano.

Por eso, si la forma más cómoda de escribir los números es una difícil conquista del hombre que ha empezado a difundirse por Europa hace sólo seis siglos, todavía más joven es el *álgebra* que requiere, además de la numeración moderna (arábigo-india), otros requisitos: una ampliación del concepto de número; la introducción de unos *símbolos* claros, precisos y cómodos para representar operaciones y «expresiones» que no sólo contienen números concretos, sino también números *indeterminados* o *incógnitas*.

Si se le preguntara hoy a un especialista de álgebra «¿Qué es el álgebra? Explíquemelo en pocas palabras, sencillas y claras», se vería en un apuro para responder, tantos y tales han sido los desarrollos de esta rama de las matemáticas en los últimos cien años. Si en cambio se pudiera hacer la misma pregunta al espíritu del viejo al-Khuwarizmi (¡otra vez él!), a lo mejor le hubiera costado algo de trabajo reconocer la palabra árabe *al-giabr*, de la que por deformación se ha llegado a nuestra palabra «álgebra», pero no tendría ninguna dificultad para responder. Para él, en efecto, la *al-giabr* no era más que cierta regla para transformar una *igualdad* en otra igualdad que tenga el mismo valor (es decir, que sea equi-

valente»), una regla muy sencilla y fácil de entender, que explicaremos a continuación. Si yo sé que $A - B = C$, entonces sé también con seguridad que $A = B + C$, y viceversa; en suma, si antes del signo «igual», o sea en el primer miembro de la igualdad, una cantidad es sustraída, se puede en cambio sumar esa cantidad en la otra parte, es decir, en el segundo miembro de la igualdad. Si nos fijamos únicamente en los símbolos, podemos decir que una cantidad se puede trasladar del primer al segundo miembro de la igualdad cambiando el signo menos por el signo más, o viceversa. Esto se puede entender también por sentido común; lo podemos justificar con el hecho de que añadiendo la misma cantidad a cada una de dos cantidades iguales, el resultado será otras dos cantidades que siguen siendo iguales. Por eso, si las cantidades $A - B$ y C son iguales, también lo serán las nuevas cantidades que se obtienen añadiendo a ambas la cantidad B; es decir, que si $A - B = C$, también $A - B + B = C + B$; pero $A - B + B = A$ (si primero añado y luego quito la misma cantidad, hago y deshago, o sea que dejo las cosas como estaban); por eso $A = B + C$.

Si para el matemático moderno la palabra álgebra significa demasiadas cosas (demasiadas para poder explicarlas brevemente), para al-Khuwarizmi significaba demasiado poco. Para lo que ahora nos interesa, podemos definir el álgebra como la rama de las matemáticas que estudia las igualdades, y especialmente las igualdades que contienen magnitudes incógnitas, igualdades que se pueden verificar o no según los valores que se den a las magnitudes incógnitas. Es decir, que el álgebra es la ciencia de las igualdades condicionadas, o *ecuaciones.*

Cómo se «pone en ecuación»

«Ahora entiendo por qué se dice «¡esto es álgebra!» al hablar de algo incomprensible», dirá alguno de los lectores después de nuestra definición, que a lo mejor en vez de aclarar las cosas las ha puesto más difíciles. En matemáticas es siempre muy difícil dar unas definiciones generales, y un ejemplo de ello es el caso de toda una rama, el álgebra. Y si encima se intenta dar una definición general de todas las matemáticas... ¡peor todavía! Quizá la definición más singular es la que ha dado un famoso matemático y filósofo recientemente desaparecido, Bertrand Russell, quien ha dicho más o menos esto: «La matemática es una ciencia en la que no se sabe de qué se está hablando y no se sabe si lo que se está diciendo es verdadero o falso».

¿Qué es una *ecuación?* En vez de decirlo en general, veamos algún ejemplo de ecuación; no sólo se entenderá mejor, sino que también se verá —o se empezará a vislumbrar— la gran utilidad de esta ciencia, el álgebra. Muchos de los juegos matemáticos que se pueden encontrar en los pasatiempos para pequeños y mayores se resuelven con las reglas del álgebra, y se expresan con una o más ecuaciones. Inventemos uno, por poner un ejemplo:

«*Sumando mi edad y la de mi hermano resultan 26 años. Dentro de diez años, mi hermano tendrá el doble de la edad que tengo yo ahora. ¿Cuáles son ahora nuestras edades?*»

Primera regla fundamental: traducir en ecuaciones, o sea sustituir las palabras por símbolos, números, signos de la operación, etc. Pongámonos de acuerdo. Llamemos x a mi edad, o sea al número de años que tengo: la x sirve para indicar un número *incógnito*, desconocido, que de momento ignoro pero que espero determinar. Llamemos y al número de años de mi hermano. Según esto, la primera frase, «sumando mi edad y la de mi hermano resultan 26 años», se escribirá así:

$$x + y = 26;$$

(¡sí! se trata de la misma frase escrita en una lengua diferente, más rápida, más concisa, absolutamente internacional). La segunda frase se traduce de nuestra lengua al lenguaje simbólico internacional del álgebra, así:

$$(y + 10) = 2x.$$

En efecto: dentro de 10 años mi hermano tendrá diez años más de los y que tiene ahora, o sea que tendrá $(y + 10)$ años. Apliquemos, en sentido contrario, la regla *al-giabr* que hemos explicado antes: si $y + 10 = 2x$, entonces $y = 2x - 10$. Pero entonces también en la primera frase-ecuación puedo poner $2x - 10$ en lugar de y (son cantidades iguales, es la misma cosa); por lo tanto tendré que:

$$x + (2x - 10) = 26.$$

Apliquemos de nuevo la regla *al-giabr*:

$$x + 2x = 26 + 10 = 36.$$

Pero si a un número x le añado el doble de x tendré tres veces el número x; de manera que:

$3x = 36$, o sea que, necesariamente, $x = 12$. Yo tengo 12 años, y por lo tanto mi hermano tiene 14, no hay más posibilidad que ésa; las dos igualdades

$$x + y = 26$$
$$y + 10 = 2x$$

sólo son ciertas si damos los valores $x = 12$; $y = 14$.

Nota. Para entender bien este ejemplo, aconsejamos que se tome lápiz y papel y se vuelvan a hacer los cálculos y el razonamiento. También aconsejamos consultar el apéndice núm. 11, cuantas veces haga falta, ya que allí se resumen las principales reglas del álgebra.

De las «deudas» a los «números negativos»

«¿Es posible que un procedimiento tan sencillo se les haya ocurrido a los hombres hace sólo algo más de mil años, y se haya precisado y difundido hace apenas unos cuatrocientos años?», se preguntará quizás alguno de los lectores. Veamos: bien pensado, casi todas las grandes ideas geniales parecen sencillas porque más adelante, cuando están claras para todos, ya no se advierten las enormes dificultades que encontraron en su nacimiento. Tratemos pues de reconstruir alguna de las notables dificultades que han obstaculizado el surgimiento y el afianzamiento de las ideas sencillas y geniales que forman la base del álgebra (ver apéndice núm. 11). Como siempre, conviene poner un ejemplo. Tomemos otro problema semejante al de antes:

«Yo tengo ahora 15 años, y mi hermano tiene 9. ¿En qué momento de nuestra vida mi edad es el doble de la suya?»

La incógnita, x, es en este caso el número de años que tengo que añadir tanto a mis 15 como a los 9 de mi hermano, para que mi edad sea el doble de la suya. Por lo tanto la ecuación se escribirá así:

$$15 + x = 2\ (9 + x),\ \text{o sea:}$$
$$15 + x = 18 + 2x.$$

Pero, «transportando» el 18 al primer término y la x al segundo, siempre siguiendo la regla *al-giabr*, resulta:

$$x = 15 - 18$$

pero 18 es mayor que 15: ¿cómo restar 18 de 15? Con lo que sé hasta ahora, de 15 sólo puedo quitar hasta 15, y tendré cero; si le resto 18, me quedan todavía 3 unidades, tendría que llegar a «3 bajo cero». Pero se trata de x años, y no se dice en ningún momento que la relación pedida entre las edades se tenga que realizar «dentro de x años»; también podía haberse producido «hace x años». Es éste precisamente nuestro caso. En efecto, hace tres años mi edad era el doble de la de mi hermano (yo tenía 12 y él 6). Hace tres años, tres años atrás, tres años negativos: lo mismo que «tres bajo cero» o tres menos.

$$15 - 8 = -3 \textit{ (menos tres, número negativo).}$$

Con este primer ejemplo nos damos cuenta ya de que los números negativos se conocen... mucho antes de conocerlos. En realidad, incluso antes de empezar a estudiar álgebra nos acostumbramos a utilizar muchos números negativos, aunque no usemos ese nombre ni hagamos operaciones con ellos. En la escuela aprendemos que en Siberia o en Canadá se alcanzan en invierno temperaturas de 20, 30 o 40 grados bajo cero, o que el fondo de la fosa de las Filipinas está a más de 10 mil metros bajo el nivel del mar; hemos estudiado que Roma fue fundada en el año 753 aC. Sólo falta, pues, armarse de valor y decir: temperatura de — 40 grados, altitud de — 10.000 metros, año — 753: «menos 40», «menos 10.000», «menos 753». Una temperatura negativa será una temperatura por debajo del cero del termómetro; una altitud negativa será lo contrario de una altitud, o sea una profundidad (por debajo de la altitud «cero», que es el nivel del mar); un año negativo será un año anterior a una fecha importante elegida como año cero, como principio (el año del nacimiento de Cristo en el calendario más utilizado, el de la égira de Mahoma en el mahometano, el año legendario de la creación del mundo en el calendario hebreo, el de la toma de la Bastilla en el calendario de la Revolución francesa, y así sucesivamente).

Y mucho más conocidos son esos números negativos que se llaman... deudas. Si yo tengo un crédito de diez mil pesetas, y una deuda de cinco mil, mi balance está «en activo» de cinco mil pesetas, y es positivo; si las cosas están al revés,

mi balance está «en pasivo» de cinco mil pesetas, y es negativo. En vez de decir: cinco mil pesetas de deuda, puedo escribir en este caso: — 5.000 pesetas.

Cuando en ciertas ecuaciones, como en el ejemplo que hemos dado hace poco, los viejos algebristas indios y árabes, incluido al-Khuwarizmi, encontraban como solución un número negativo, no se asustaban, y lo interpretaban como una «deuda» (su aritmética y su álgebra estaban enfocadas sobre todo al comercio, o sea a los problemas cuya incógnita es el «dinero»). De todos modos no se atrevían a considerar las deudas como unos números cualesquiera, ni hacían con ellos, con las reglas apropiadas, las operaciones ordinarias de adición, sustracción, multiplicación o división. Lo más difícil fue precisamente esto: ampliar el concepto de número, incorporando los números negativos a los positivos. Y es que su mente se resistía a esa idea, de modo que al principio lo hacían con una finalidad práctica, y sólo al cabo de mucho tiempo los matemáticos comprendieron que no había motivo para no considerar las deudas unos números como los demás: al principio los consideraron «números absurdos» (*numeri absurdi* en el latín del alemán Stifel, matemático que vivió alrededor de 1520), que no se podían entender, aunque se hacían necesarios para realizar ciertos cálculos.

Cómo se hacen los cálculos con los «numeri absurdi», o sea con los números negativos

Esto sólo pretende ser una historia de algunas *ideas* de las matemáticas. Así, pues, no queremos explicar de un modo sistemático lo que enseñan los maestros y los profesores, o lo que aprende uno por su cuenta cuando es mayor, en los verdaderos libros de estudio. Por eso no vamos a explicar aquí de un modo riguroso las reglas del cálculo con números negativos: sólo trataremos de dar una idea de esta conquista del ingenio humano, que, al igual que las demás, no resultó nada fácil. Pero hemos resumido las reglas principales en el apéndice núm. 11.

¿Qué quiere decir multiplicar un número positivo por uno negativo, por ejemplo 7 por (— 2)? Volvamos al caso concreto de las deudas, y lo entenderemos fácilmente. Si yo tengo dos deudas de siete pesetas [simbolizado: $2(-7)$] o siete deudas de dos pesetas [simbolizado: $7(-2)$], tendré en total una deuda de 14 pesetas; si además tengo 14 pesetas positivas, o

sea 14 pesetas en el bolsillo, una vez pagada la deuda me encuentro limpio de deudas, en paces, a cero. Por eso $7(-2) = 2(-7) = -14$, que es el opuesto de 14. La idea que hay que captar es algo sencillo y difícil al mismo tiempo: que negativo y positivo son opuestos entre sí. Si se trata de dinero, está claro (como hemos dicho hace un momento) que un crédito de 1.000 pesetas es el opuesto a una deuda de 1.000 pesetas, porque la deuda anula el crédito, o al contrario: utilizando los símbolos, $+1.000 + (-1.000) = 0$. Si se trata de alturas y profundidades, o sea de subidas y bajadas, está claro que una subida de 100 m de desnivel anula una bajada de 100 m de desnivel; si antes he subido 100 m, y luego bajo 100 m, o viceversa, me vuelvo a encontrar en el punto de partida, en la «salida», en el «cero», y lo mismo si hago dos largos de piscina a nado, 25 metros en una dirección y otros 25 en la contraria: me encuentro de nuevo en el punto de partida, en la línea cero: $25 + (-25) = 0$. «¡Pero yo he recorrido cincuenta metros!» De acuerdo, pero veinticinco hacia adelante *(positivos)* y veinticinco hacia atrás *(negativos)*, de modo que, al final, en vez de estar a cincuenta metros de la salida, estoy a... cero metros.

Si en cualquier caso le dáis al signo — antepuesto (es decir, puesto delante de algo) el significado de «lo contrario», o mejor aún, «el opuesto» de aquello (lo que, unido a eso, lo compensa o anula), tendremos entonces que deuda = — crédito (opuesta al crédito), pero también que crédito = — deuda, y entonces también que crédito = — (— crédito), es decir que el opuesto del opuesto de un crédito es un crédito: si yo tengo el opuesto de una deuda de 1.000 pesetas significa que tengo un crédito de 1.000 pesetas, y por lo tanto:

$$-(-1.000) = +1.000.$$

El opuesto de subir es bajar, que a su vez es el opuesto de subir: el opuesto del opuesto de subir es... subir, porque es el opuesto de bajar (que precisamente es el opuesto de subir). Si se ha entendido esto, es casi inútil aprenderse de memoria las reglas de los signos, porque se van deduciendo con el razonamiento. Ya hemos visto que *menos* por *más* es igual a *menos;* vamos a verlo ahora con el siguiente razonamiento: En primer lugar, — 3 multiplicado por 4 será el opuesto de 3×4 [$(-3) \times 4 = -(3 \times 4)$], o sea -12, ya que $3 \times 4 = 12$ y -12 es el opuesto de 12. Veamos ahora la regla más difícil: *menos* por *menos* es igual a *más*. $(-3) \times (-4) = -[3 \times$

× (— 4)] que es el opuesto de 3 × (— 4); pero ya sabemos que 3 × (— 4) es — 12, y el opuesto de — 12 es + 12 [porque, justamente, — (— 12) = opuesto del opuesto de 12 = 12].

¿No lo habéis entendido? Pues entonces de bien poco sirve aprenderse la regla: «menos por más y más por menos dan menos, más por más y menos por menos dan más» (y la regla análoga para la división); o bien la vais a olvidar, o la vais a aplicar mecánicamente, sin entender lo que hacéis, como aprendices de brujo en posesión de una fórmula mágica que escapa a su entendimiento. Moraleja: ¿en ningún caso es importante saberse las reglas de memoria? Pues sí; y en cambio, lo que cuenta en cada caso es haber entendido la idea en que se basa esa regla.

Pero sigamos adelante: que nos sigan los que sean el opuesto del opuesto de inteligentes. A los que sean un poco el opuesto del opuesto del opuesto de inteligentes, en cambio, les aconsejamos que vayan al opuesto del principio para reflexionar sobre el opuesto en el apéndice núm. 13.

¿Son números los irracionales?

Ya hemos visto que un segmento puede ser *inconmensurable* con respecto a otro, y concretamente que la medida de la diagonal con respecto al lado no es un número racional (una fracción).

Según los científicos griegos, y también según muchos científicos posteriores, hasta el Renacimiento, hasta el siglo XVII, una medida semejante no se podía considerar un número. Según los griegos los números eran los enteros (positivos) y las fracciones (positivas); además existían las *relaciones*, las *medidas*, que podían o no ser «números». En cambio, según nosotros esa medida de la diagonal es un número, que llamamos «raíz cuadrada de dos» ($\sqrt{2}$); y esto porque hemos ampliado la idea de número. Nosotros consideramos números no sólo los enteros y los decimales con un número finito de cifras después de la coma, o también con un número infinito pero periódicas (como 0,33333... = 1/3, etc.), es decir, a los que se pueden reducir a fracciones siempre, sino también los números decimales con un número ilimitado de cifras, no periódico, después de la coma. Tenemos que aceptar estos números tan complicados, y que en cierto modo repugnan al sentido común, a la «razón» (se llaman, como ya hemos dicho, números irracionales, que en realidad en este caso significa *no-relaciones*, y no contrarios a la razón) si en nuestros cálculos algebraicos queremos introducir algo tan sencillo, e indispensable, como la medida de la diagonal con respecto al lado del cuadrado. El razonamiento que se hace «fuera del texto» (ver apéndice núm. 8) demuestra, en efecto, que esa medida no es una fracción, y no es por lo tanto un número decimal ordinario (eventualmente periódico). Pues bien, esto querrá decir (ya lo hemos visto) que nunca nos podremos parar en las operaciones de medida, ni en los decímetros, ni en los centímetros, ni en los milímetros... ni en las millonésimas, ni en las decenas de millonésima de milímetro; porque siempre nos quedará un pedacito, cada vez más pequeño, que se tiene que medir con una unidad de medida cada vez más pequeña, pero quedando siempre un resto, hasta el infinito.

La idea de número irracional, ciertamente, resulta difícil; pero hoy día incluso los que no la han entendido del todo hacen tranquilamente sus cálculos con la raíz cuadrada de dos o la raíz cúbica de tres, o con el número de Arquímedes π («pi griega») que es irracional, de una raza mucho peor que la honrada raíz cuadrada de dos (es nada menos que un número irracional *trascendente*). Es decir, que nos hemos acostumbrado a considerar la raíz cuadrada de dos como un número cualquiera, aunque no hayamos entendido del todo de qué se trata, lo mismo que estamos acostumbrados a la idea de que la Tierra gira alrededor del sol, aunque no seamos capaces de explicar con claridad porqué lo que nos dice la vista es tan contrario a la realidad. En cambio, los científicos griegos (y no por ignorancia, sino más bien por profundidad de pensamiento) se resistían a considerar la relación entre la diagonal del cuadrado y el lado como un número cualquiera; hacían razonamientos y operaciones con esa relación, pero siempre de forma geométrica, sin incluirla en el cálculo aritmético.

Para hacer el álgebra, para tratar también a estos «no-números» como números, era necesario, pues, un profundo esfuerzo mental: se necesitaba una idea nueva de número, más amplia, y no sólo la introducción de nuevos símbolos.

Del álgebra geométrica a la «logística speciosa»

Un ejemplo, según espero, nos ayudará a entender la diferencia entre nuestra mentalidad y la de los griegos. Se pregunta lo siguiente:

«Dados dos segmentos A y B, ¿cómo se podrá calcular el área del cuadrado que tiene por lado el segmento A + B, suma de los dos lados?»

He aquí la respuesta del matemático griego (la encontramos, por ejemplo, en la cuarta proposición del segundo libro de los famosos *Elementos* de Euclides, que data del siglo III aC).

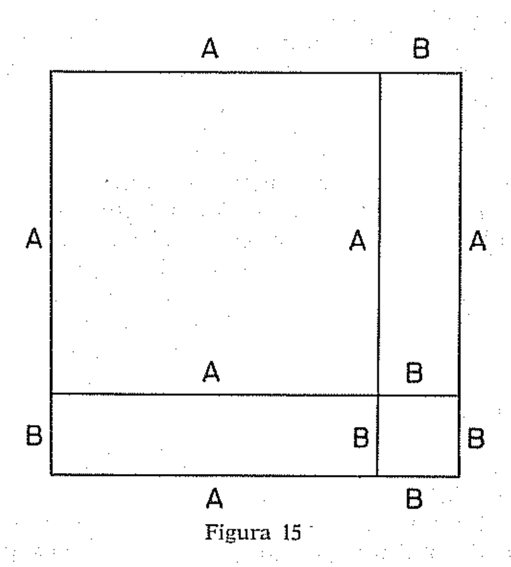


Figura 15

Formemos el cuadrado de lado A + B, y dividamos los cuatro lados en las partes A y B que los forman, tal como aparece en la figura (a decir verdad, un matemático tendría que explicarlo todo siempre, con la mayor precisión, en palabras; pero por una vez nos permitimos mostrar la figura).

Trazad las perpendiculares a los lados en dichos puntos de división; veréis por la figura (o por el razonamiento escrito, si tenéis la paciencia de hacerlo) que el cuadrado del lado A + B está dividido en *cuatro partes:* dos cuadrados y dos rectángulos. Los dos cuadrados tienen por lado uno A y el otro B, y los dos rectángulos son iguales y tienen por lados A y B. Entonces:

«El cuadrado de lado A + B es igual a la suma del cuadrado de lado A, más el cuadrado de lado B, más dos rectángulos de lados A y B.»

He aquí en cambio la respuesta moderna (por ejemplo de Isaac Newton, o de otros anteriores a él). Consideremos las medidas a y b de los segmentos A y B. No nos interesa ahora la medida efectiva es decir que no los vamos a medir prácticamente; sabemos sin embargo que sus medidas, respecto a un *metro* determinado, son a y b. ¿Fracciones? ¿Números irracionales? Nos da lo mismo, porque sabemos que los cálculos se hacen con las mismas reglas, ya se trate de fracciones (y en particular de enteros) o de irracionales, como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{a}$, π, etc. Entonces la medida del segmento A + B será $a + b$ metros ordinarios, si el metro adoptado es el que se emplea normalmente: entonces la medida del cuadrado de lado A + B será $(a + b)^2$ metros cuadrados. Pero podemos calcular el número $(a + b)^2$ aplicando repetidamente una de las conocidas propiedades de los números, la *propiedad distributiva* (ver apéndice núm. 11):

$$(a + b) \times (a + b) = a\,(a + b) + b\,(a + b) =$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Por lo tanto: «*El cuadrado de una suma,* a + b, *es igual a la suma de los cuadrados de los dos sumandos más el doble producto de ambos.*»

La respuesta de Euclides y la de Newton son, en cierto modo, la misma respuesta en dos «lenguajes» distintos. Sin embargo, si lo pensamos bien, la respuesta de Newton (o de Tartaglia, o de Descartes, etc.) encierra, comparada con la que daba Euclides al mismo problema dos mil años antes, el inmenso progreso desde la matemática antigua a la moderna. Con este ejemplo se ve con claridad que el progreso reside sobre todo en el método, en la mentalidad, en las ideas. Podemos ya tratar de resumir en qué consiste ese progreso. *Primero:* en la ampliación del concepto de número (ya no son sólo números los enteros positivos y las fracciones positivas, sino también los enteros y las fracciones *negativas*, y también los *irracionales*, positivos y negativos). *Segundo:* en la construcción de un sistema sencillo, completo, preciso, para escribir los números y operar con ellos. *Tercero:* en la aplicación de las reglas del cálculo y de los símbolos relativos, no sólo a los nuevos números, sino también a cantidades indeterminadas o incógnitas, también a símbolos de cualquier tipo de números, no sólo a unos números determinados.

A propósito de esto decía en 1635 el gran geómetra italiano

Buenaventura Cavalieri, discípulo de Galileo Galilei: «Los algebristas... suman, restan, multiplican y dividen las raíces de los números, aun siendo inefables, absurdas y desconocidas (*ineffabiles, surdae ac ignotae*) y están convencidos de haber actuado correctamente, siempre que eso sirva para obtener el resultado deseado.» Como se puede ver, todavía a mediados del siglo XVII el álgebra se aceptaba con un fin práctico, sin llegar claramente al fondo de la idea.

Puesto que en latín «forma» o «símbolo» se dice, como quizá sepáis, *species*, los matemáticos del siglo XVI que por primera vez tuvieron el arrojo intelectual de hacer cálculos con símbolos, o sea con «letras», llamaron a su arte *logística speciosa*, para distinguirla de la *logística* (o *arithmetica*) *numerosa*, el arte de calcular con unos números concretos. Hoy día llamamos a estas dos formas de cálculo: *cálculo numérico* y *cálculo literal*.

Como hemos dicho, el cálculo literal (o sea la *logística speciosa*) tiene, con respecto al álgebra geométrica de los griegos, enormes ventajas. Para cada una de las fórmulas del cálculo literal, por ejemplo para cada uno de esos «productos notables» que los lectores adultos se sabrán de memoria, el geómetra griego tenía que hacer un razonamiento especial, a menudo mucho más complicado que el que nos ha permitido calcular geométricamente $(A + B)^2$. Con el moderno cálculo literal, en cambio, se obtiene automáticamente y con seguridad el resultado en cada caso, aplicando algunas (muy pocas) reglas de cálculo. Tratemos de calcular, con el álgebra geométrica, expresiones como $(a + b)(a - b)$, o $(a + b + c)^2$, o $(a + b)^3$ (ver: *Cálculo de $(a + b)^3$ con el álgebra geométrica*, apéndice núm. 14) y así sucesivamente, interpretando a, b y c como segmentos, y la elevación a la segunda y tercera potencias como formación de cuadrados y de cubos: podremos ver cuánto trabajo, cuánto esfuerzo de imaginación geométrica nos va a costar, siempre que lo consigamos. En cambio, con el cálculo literal se hace todo en unos minutos, sin esfuerzo mental (sólo con un poco de atención).

No es nada exagerado decir que, para el progreso humano, la introducción y la difusión del cálculo literal, en sustitución del álgebra geométrica, ha sido una revolución comparable a la adopción de la máquina en lugar del trabajo manual. La comparación es válida en todos los aspectos: también en el de que el trabajo manual es superior al trabajo a máquina. La belleza, la fantasía, la originalidad y la individualidad de cada pieza es lo que le falta a la producción mecánica en serie. Así por ejemplo, la demostración de Euclides que hemos expuesto antes, acerca del cuadrado del «binomio» A + B, nos parece incomparablemente más bonita, más viva, más sugestiva que la «vuelta de manivela» algebraica que nos permita llegar en diez segundos al mismo resultado. Aún así, lo mismo que no se nos ocurre destrozar los telares mecánicos para volver a la lanzadera y al huso, tampoco rechazaremos la *logística speciosa* por amor a la belleza del álgebra geométrica. Trataremos, de todos modos, de conservar en nosotros, aunque usemos los nuevos instrumentos, el espíritu del viejo Euclides, la imaginación geométrica de los antiguos griegos, que será esencial para nosotros cuando no se trate de aplicar unas reglas sino de descubrir y crear otras nuevas. No olvidemos que también en nuestra industria altamente mecanizada y automatizada, los prototipos, o sea los modelos, los originales, tienen que ser dibujados, y en gran parte hechos a mano.

5. La geometría se convierte en álgebra

La geometría griega se puede comparar con un elegante trabajo a mano y el álgebra árabe con una producción automática, a máquina. Pues bien, podemos decir que la matemática moderna empieza hace tres siglos, cuando la máquina algebraica se empieza a aplicar también a la geometría, y el estudio de curvas, superficies y figuras geométricas, se traduce en el estudio de determinadas ecuaciones. Esta idea, tan revolucionaria, que marcó el comienzo de un período completamente nuevo para las ciencias matemáticas, es sencilla; y hoy día es de todos sabida y está tan difundida que vosotros mismos la conocéis, ya «la habéis visto», aunque a lo mejor todavía no la tenéis muy clara en la mente; aunque casi con seguridad no sabéis (o creéis que no lo sabéis) lo que significa la introducción de un *sistema de coordenadas* en el plano o en el espacio.

Por qué los «diagramas» se llaman «cartesianos»

Un *diagrama cartesiano* es algo que se ve prácticamente todos los días y que todos entienden aunque no sepan que esos «dibujos» se llaman así: *diagramas cartesianos.* Muchos de los pocos lectores que han llegado hasta aquí serán aficionados al deporte, y habrán visto, quién sabe cuántas veces, en los periódicos, el «gráfico» o «diagrama» de una etapa del *Giro* de Italia o del *Tour* de Francia. He aquí, por ejemplo, el gráfico o mejor dicho el diagrama cartesiano de la etapa del Giro correspondiente a las Dolomitas:

El gráfico sube y baja, al igual que sube y baja la carretera en los puertos de Falzarego, Pordoi o Sella; si la carretera sube en un kilómetro 100 metros (una pendiente muy fuerte, del 10%), y si cada kilómetro está representado en el segmento horizontal por un milímetro, la curva de la carretera dibujada en la figura subirá una décima de milímetro por cada milímetro de desplazamiento horizontal.

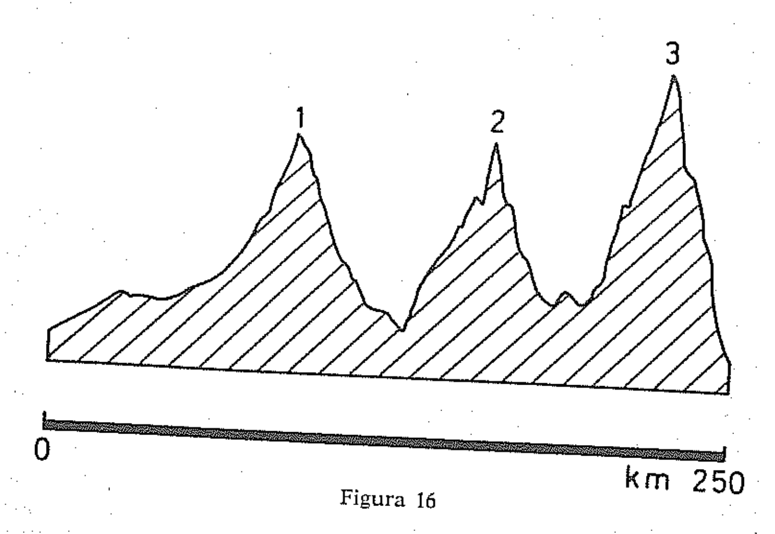


Figura 16

Todos habréis visto en los libros de geografía, en las exposiciones y ferias, el diagrama referente a la producción de algún artículo.

Veamos la figura 17 con la producción de automóviles en un país de 1900 a 1950; si queremos saber cuántos automóviles se han producido en 1940, por ejemplo, tenemos que leer 1940 en la semi-recta horizontal de la base, y medir después la altura de la curva justo encima de ese número con la unidad de medida asignada a la semi-recta vertical. En un caso como éste, para hacer más cómoda la lectura del diagrama, al lado de la altura correspondiente a la producción de cada año se marca su medida (en... automóviles) o bien, correspondiendo con cada año, se dibuja un automóvil de dimensiones proporcionadas a la cantidad de la producción de dicho año. Se pueden usar muchos sistemas, pero la idea es la misma. Intentemos comprender la idea que se esconde en este expresivo gráfico o diagrama cartesiano. Se trata de una idea que fue expresada por primera vez de una forma sistemática, y con utilidad práctica, por un gran contemporáneo de Galileo Galilei: el filósofo y matemático francés René Descartes. Puesto que Descartes quiere decir «De las Cartas», y puesto que en el siglo XVII el latín era tan utilizado por los estudiosos que traducían al latín hasta sus nombres y

apellidos, Descartes es conocido por *Cartesius* y de ahí el adjetivo cartesiano.

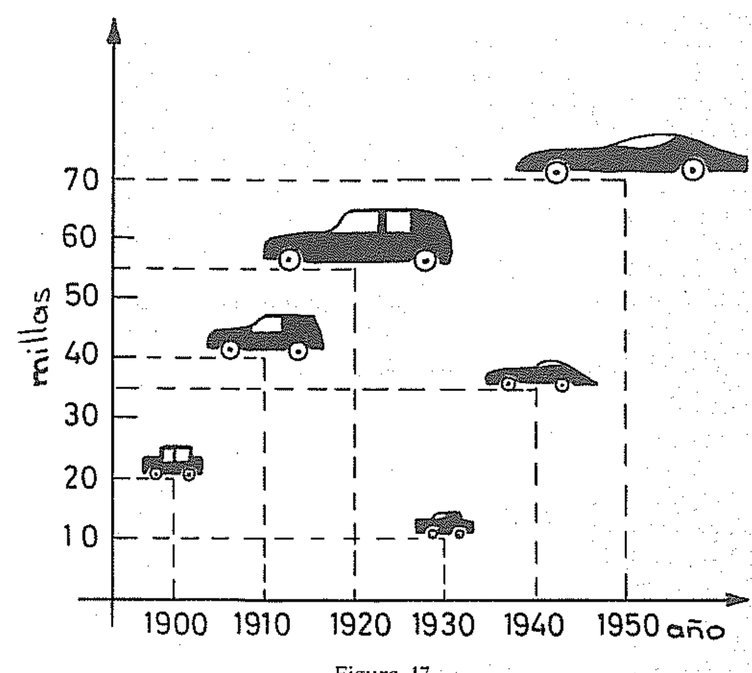


Figura 17

Descartes escribió muchísimos libros, más o menos importantes (algunos muy importantes) de física, filosofía y otros temas. De matemáticas también escribió varias cosas; pero su nombre en este campo está unido sobre todo a un librillo de pocas páginas, la *Géométrie*, publicado en Leiden, Holanda, en 1637. En este librillo se expone una idea, o mejor dicho un método, que iba a conducir a una revolución tan grande, a un desarrollo tan impetuoso de todas las ciencias, que se puede decir que, la fecha de la publicación de la *Géométrie*, es la fecha del nacimiento de la ciencia moderna. Naturalmente hay que saber interpretar esta observación. Sólo para las personas hay un día, una hora, un instante preciso para el nacimiento; sólo para las personas se puede decir «nacido en... el día... del año... hijo de... y de...». Para las ideas, la cosa es diferente, y tanto más difícil es la cuestión

cuando se trata de la fecha del nacimiento de la ciencia moderna. No se trata de un día, sino de un período, ni de una obra, sino de muchas, ni de un solo genio, sino de muchos investigadores y descubridores. El período es indudablemente aquél: entre 1630 y 1640 maduran muchas cosas. Sólo un año después de la publicación de la *Géométrie*, en 1638, y también en Leiden, la famosa editorial de los Elzevir publica los *Dialoghi attorno a due nuove scienze* (Diálogos acerca de dos nuevas ciencias) de Galileo Galilei, con el que nace la moderna mecánica (la libre Holanda daba la posibilidad de publicar sus escritos a un perseguido como Galilei, condenado como «copernicano» por la Iglesia católica y prisionero de su patria). Pero, si en lugar de hablar del nacimiento de la ciencia moderna en general, queremos limitarnos al origen de la fecundísima fusión entre el álgebra y la geometría, es decir, a los orígenes de la *geometría analítica*, ni siquiera en ese caso podemos fijar precisamente esa fecha, 1637, sin más; ese libro, la *Géométrie*, y ningún otro; ese científico, René Descartes, y nadie más.

La nueva y feliz idea estaba en el aire en aquella época; también la había captado, y la aplicaba en las mismas fechas, o incluso antes, otro francés genial, un hombre de leyes, Pierre Fermat, que en sus ratos libres se entretenía con las matemáticas. «Estar en el aire» en el fondo significa sólo esto: que en un momento determinado se dan todos los conocimientos e ideas preliminares que permiten el surgimiento de la nueva idea. Pero vamos a explicar ya en qué consiste la idea cartesiana, y qué tiene que ver con los diagramas (cartesianos) de los que hemos dado algún ejemplo.

Las coordenadas del tablero de ajedrez y el tablero de ajedrez de las coordenadas

El que me haya seguido hasta aquí es un tipo tenaz y paciente; por eso, probablemente, es un jugador de ajedrez. Bien: jugador o no, lo cierto es que habrá visto alguna vez, en unos «pasatiempos», una respuesta a un problema de ajedrez. «Las blancas mueven y dan mate en dos jugadas.» Solución: «La reina blanca mueve de A-3 a B-4, etc.» ¿Qué quieren decir esas extrañas siglas de código secreto: A-3, B-4, H-7 y demás?

Muy sencillo: son las coordenadas del tablero de ajedrez, es decir, los números que permiten localizar en el tablero un

determinado cuadrado. En efecto, como se ve en la figura 18, la base del tablero de ajedrez está dividida en ocho partes, indicadas con las letras que van de la A a la H, mientras que la altura del tablero está dividida también en ocho partes, que esta vez se indican con los números del 1 al 8. Entonces estará claro lo que quiere decir B-3. Quiere decir el cuadrado en el que se encuentran la columna de base B y la fila de altura 3, o sea la vertical B y la horizontal 3. Este sistema resulta muy práctico y se utiliza mucho en los planos de las ciudades (y en los mapas geográficos, aunque en éstos lo que se utiliza es el retículo de los meridianos y paralelos, coordenadas geográficas de la esfera terrestre, de las que no vamos a hablar aquí). El plano está cuadriculado con verticales y horizontales, trazadas a la misma distancia, de un centímetro por ejemplo, y señaladas con números progresivos, del 1 al 10 o al 20, según el tamaño del plano o el

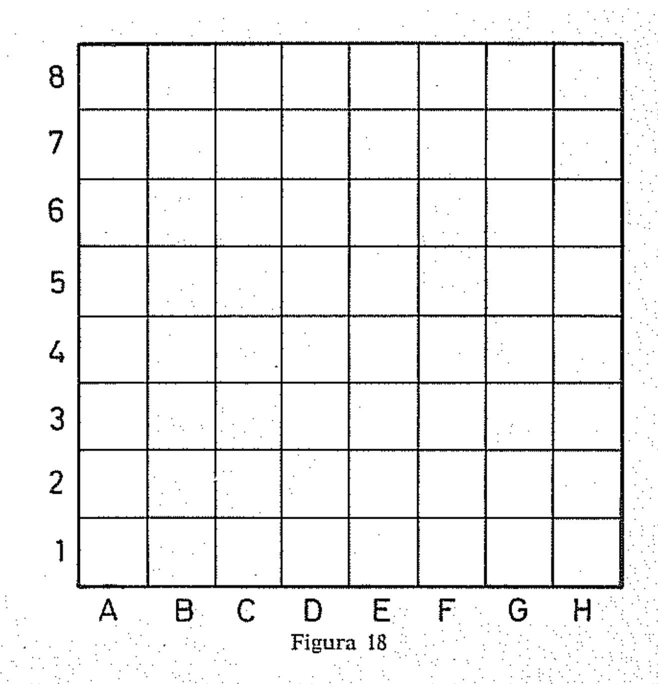


Figura 18

espesor de la cuadrícula. Las verticales están numeradas del 1 al 10, por ejemplo, de izquierda a derecha, mientras que las horizontales están numeradas de abajo a arriba; los nú-

meros de la vertical están señalados en la horizontal de la base, y los números de la horizontal en la vertical (o altura) de la izquierda. En general, para localizar un tramo de calle, una plaza o un monumento, basta con indicar el cuadrado en que se encuentra, *individualizado* por dos números enteros.

Por ejemplo, decir que para encontrar la Plaza de San Pedro en el plano de Roma hay que tomar el cuadrado individualizado por los números 1 y 8 significa que la plaza, en el plano, se encuentra en el cuadrado comprendido entre las verticales 0 y 1 y las horizontales 7 y 8. Pero también se puede ser más preciso, e individualizar un punto con dos números, por ejemplo, en nuestro caso, la posición de la cima de la cúpula de San Pedro. Si yo digo que la cima de la cúpula es el punto: (0,5; 7,3), esto significa que la cima de la cúpula se encuentra en el punto en que se cortan la vertical que dista medio centímetro del borde vertical de la izquierda, y la

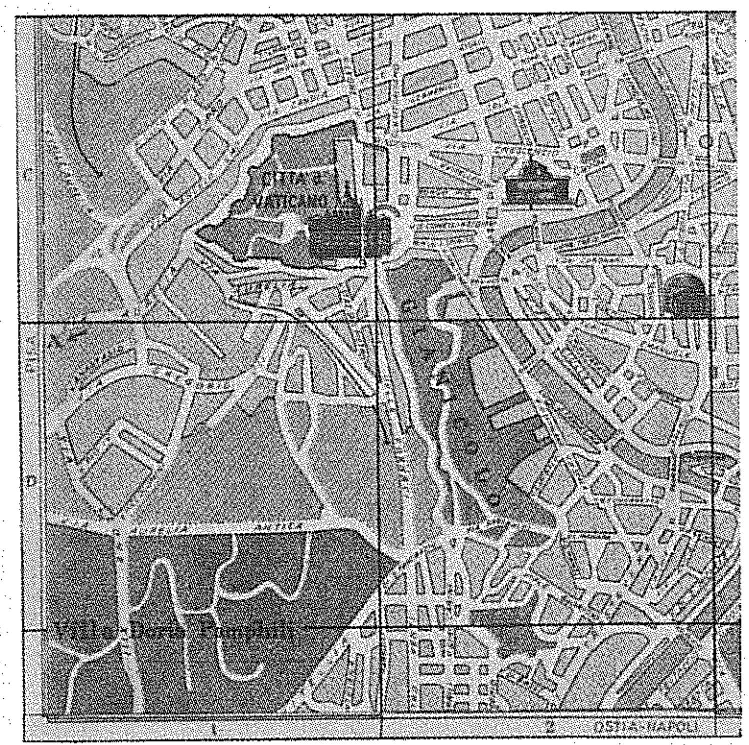


Figura 19

horizontal que está a siete centímetros y tres milímetros de la base horizontal. Estamos llegando ya a la idea de Descartes. En efecto, podremos llamar al punto-cúpula de San Pedro del plano de Roma, punto de coordenadas cartesianas: 0,5 y 7,3; la primera coordenada, o sea el número de la vertical, que es la distancia al borde vertical de la izquierda, se llama *abscisa*, mientras que la segunda se llama *ordenada* del punto (¡cuidado! los números que nos hemos inventado no corresponden a la cuadrícula del plano de Roma).

También lo podemos explicar de otra forma. Dado un punto P del plano (por ejemplo, el punto-cúpula de San Pedro), tracemos desde él la perpendicular a la horizontal de la base y la perpendicular al borde vertical de la izquierda, que por otro lado es la horizontal del punto en cuestión (ver la figura 20). Para simplificar, llamamos eje horizontal o *primer eje de referencia* a la horizontal-base del plano, y eje vertical o *segundo eje de referencia* al borde vertical de la izquierda; además llamamos *origen* de la referencia al punto $\odot$ a P_2, medida con la unidad que ya hemos elegido para las abscisas.

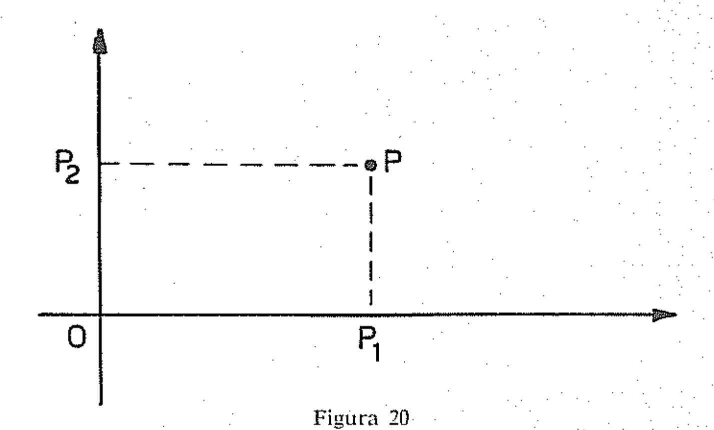


Figura 20

Y viceversa: elijamos dos números cualesquiera. Para fijar las ideas, sean los números 102 y 415. En este caso existirá un punto P_1, y sólo uno, en el eje horizontal, que tenga 102 como distancia al origen $\odot$; y existirá un punto P_2, y sólo uno, en el eje vertical, que tenga como distancia 415 al $\odot$. Los números 102 y 415 serán centímetros, metros, etc., según sea la unidad de medida que hayamos elegido.

Desde P_1 trazamos la vertical y desde P_2 la horizontal, llamando P al punto de encuentro de las dos rectas; entonces P es el punto (el único punto) que tenga por abscisa 102 y por ordenada 415. Tratemos de resumir lo que hemos observado hasta ahora.

Sean dos semi-rectas (*ejes*) perpendiculares entre sí (eje horizontal y vertical) que salen del mismo punto de origen ⨀; una vez fijada la unidad de medida, vamos a ocuparnos de la parte del plano (el *cuadrante*) comprendida entre las dos semi-rectas. Entonces: 1.º A un punto del cuadrante se le pueden asociar dos números determinados (coordenadas): la *abscisa* y la *ordenada*, que miden respectivamente la distancia de P al eje vertical y al horizontal, o sea la longitud de los segmentos $\odot P_1$ y $\odot P_2$ (ver figura 21); 2.º A un par de números dados en un cierto orden, por ejemplo al par (1,2), le corresponde uno y sólo un punto P del cuadrante, el que tiene

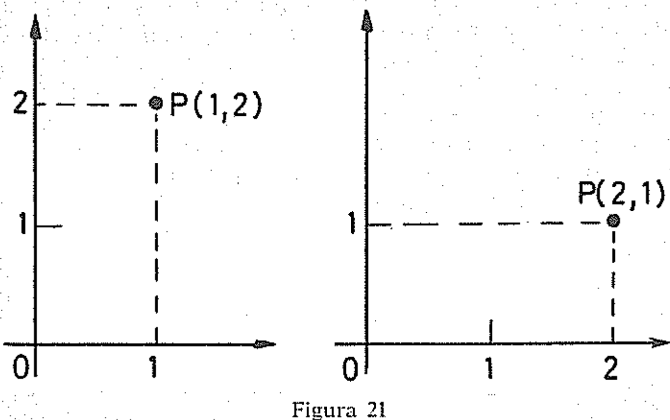


Figura 21

por abscisa 1 y por ordenada 2, es decir el único punto que tiene una distancia 1 del eje vertical y una distancia 2 del horizontal (ver otra vez el dibujo).

NOTA: el orden de los números tiene mucha importancia: el punto de coordenadas (1,2) es distinto del punto de coordenadas (2,1), como vemos claramente en el dibujo.

Para un *cuadrante*, es decir, para una cuarta parte del plano, el método de las coordenadas de Descartes está ya cla-

ro: pero todavía tenemos que superar una dificultad para hacerlo extensivo a todo el plano. En seguida se nos ocurre una primera idea: en lugar de tomar como «referencia» dos semi-rectas perpendiculares que salen del mismo punto ⨀, partimos de dos rectas perpendiculares entre sí que pasan por ⨀. ¿No puede bastar este pequeño cambio para co-ordenar (asociar) a cada punto P del plano una pareja de números, en un orden determinado: una abscisa y una ordenada, que sean las medidas de los segmentos $\odot P_1$ y $\odot P_2$, o sea las medidas de las distancias respectivas de P a la recta vertical y a la horizontal? En efecto, esto basta para dar el primer paso: asociar a cada punto una pareja determinada de números, ordenados; pero no es suficiente para el segundo paso, o sea para co-ordenar a una pareja (ordenada) de números un punto, y sólo uno. En el dibujo se puede ver claramente que haciendo lo de antes, a cuatro puntos distintos del plano se les asociaría el mismo par (ordenado) de números, que es el par (2,1) en el caso de nuestro ejemplo.

En efecto, tanto el punto P_1 como el punto P_1' tienen sobre el eje horizontal una distancia 2 al origen; tanto el punto P_2 como P_2' tienen sobre el eje vertical la distancia 1 al origen. Por lo tanto si elegimos como ejes unas rectas, en lugar de unas semi-rectas, surgen equívocos a la hora de individualizar, de la forma que ya conocemos, un punto de un plano con un par (ordenado) de números.

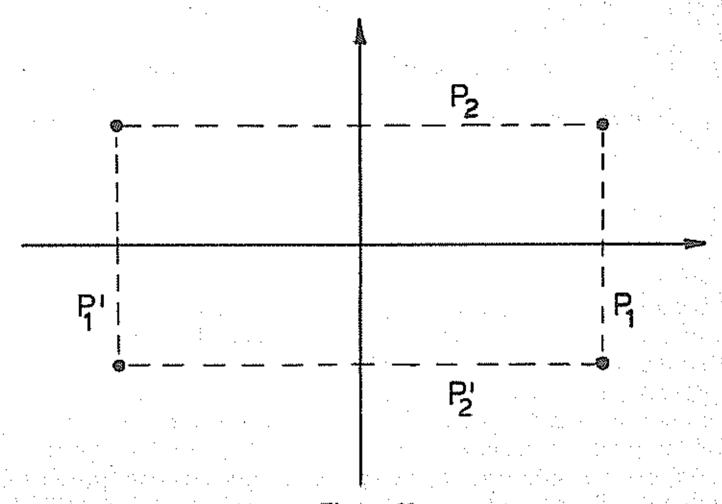


Figura 22

Pero es normal que surjan esos equívocos. Supongamos que la recta $P_1'\odot P_1$ sea una autopista y que $\odot$ sea una ciudad. Sería una estupidez citarnos con un amigo, en coche, «en la autopista del Sole, a 2 km de Florencia». ¿Dos km al sur de Florencia, o dos km al norte? ¿Dos km antes, para quien venga de Roma, o dos km después? Así, en nuestra recta que pasa por $\odot$, para localizar sin equívocos la posición de P_1, no basta con decir: a una distancia 2 de $\odot$; hay que concretar más: a una distancia 2 de $\odot$, si vamos desde $\odot$ hacia la derecha. P_1' también está a una distancia 2 de $\odot$, pero yendo hacia la izquierda. Análogamente: P_2 está a una distancia 1 de $\odot$ yendo de abajo a arriba, y P_2' está a una distancia 1 yendo de arriba a abajo. Si se ha entendido bien el papel de los números negativos en casos parecidos, será conveniente proponer la siguiente:

Convención de los signos. Las distancias al eje horizontal de los puntos que se encuentran a la derecha del «origen», se toman con el signo + (más); las distancias al eje horizontal de los puntos que están a la izquierda del origen se toman con el signo — (menos); los puntos que están en el eje vertical por encima del origen tienen una distancia positiva a $\odot$, los que están por debajo del punto origen $\odot$ tienen con respecto a él una distancia negativa.

Puesto que la abscisa de un punto se suele indicar con la letra *x*, y la ordenada con la *y*, el eje horizontal se llama:

eje de las abscisas, eje de las x o eje x;

y el eje vertical se llama:

eje de las ordenadas, eje de las y o eje y.

Y ambos se llaman *ejes coordenados.*

Una vez simplificada la terminología, podremos decir que el plano resulta dividido por el eje *x* y el eje *y* en cuatro cuadrantes. El primero está a la derecha del eje *y* y por encima del *x;* el segundo a la izquierda del eje *y*, y por encima del *x*; el tercero a la izquierda del eje *y*, y por debajo del *x*; y el cuarto a la derecha del *y* y por debajo del eje *x*.

Entonces tendremos, con la convención de los signos:
en el primer cuadrante: un punto tiene abscisa positiva y ordenada positiva;

en el segundo cuadrante: abscisa negativa y ordenada positiva;
en el tercer cuadrante: abscisa negativa y ordenada negativa;
en el cuarto cuadrante: abscisa positiva y ordenada negativa.

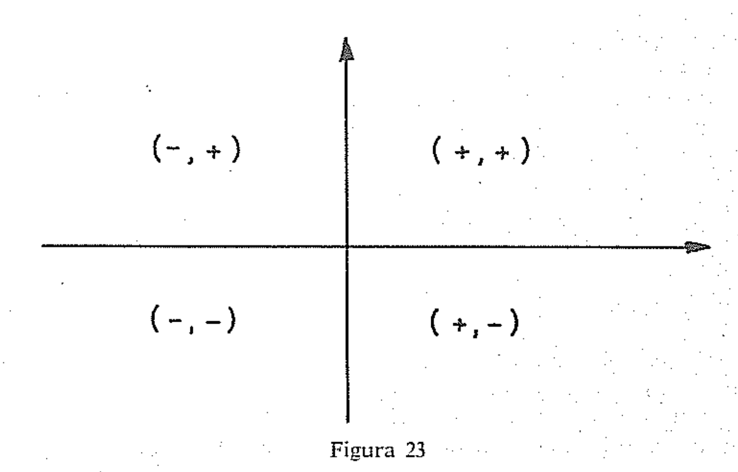


Figura 23

Ya no hay equívocos: los cuatro puntos que sin la convención de los signos tenían las mismas coordenadas (2,1) tienen ahora respectivamente las coordenadas: (2,1); (—2,1); (—2,—1) y (2,—1): a un par ordenado de números con signo *más* o *menos* le corresponde un punto concreto (observad atentamente el dibujo; para la convención de los signos en el espacio, ver el apéndice núm. 16).

Punto = par de números (en un orden determinado)

Reflexionemos bien sobre lo que hemos hecho (en el caso del plano). Hemos tomado: 1) una referencia: es decir, que hemos fijado dos rectas perpendiculares, el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas, que se cruzan en un punto origen; 2) un metro (unidad de medida). Entonces si tenemos un punto P éste tiene una determinada abscisa, que llamamos *x* y es un número (racional o irracional, postivo o negativo). El punto P tiene también una ordenada que llamamos *y;* es otro número, en el sentido más amplio de la palabra. Pero también es cierto dicho al revés: es decir, que si tomamos dos números, *x* e *y*, hay un punto P, y sólo uno, que

tiene por abscisa x y por ordenada y, porque la vertical que tiene distancia x al eje de las ordenadas y la horizontal que tiene distancia y al eje de las abscisas están individualizadas sin equivocación posible gracias a la convención de los signos, y se cortan en *un* punto y *sólo en uno*. Entonces se puede escribir:

$$P = (x,y).$$

Esta igualdad un tanto extraña, «un punto es igual a un par de números escritos en un orden determinado», quiere decir precisamente que existe un punto P y sólo uno que tenga coordenadas x e y; y que, recíprocamente, dado un punto P cualquiera en el plano en el cual se ha establecido nuestra referencia, tiene una abscisa determinada, x, y una ordenada determinada, y.

He aquí la idea de Descartes, así de sencillo. No resulta difícil de captar si se han entendido bien los números negativos. Quizá parezca una exageración, pero podemos afirmar sin temor que semejante idea ha resultado tan revolucionaria que es considerada uno de los principales puntos de partida de toda la ciencia moderna. Trataremos de justificar esta afirmación en las páginas siguientes.

Recta = ecuación de primer grado.

Para todos los puntos del eje x, y sólo para ellos, la distancia al mismo eje x es igual a cero (o sea, la ordenada). Por lo tanto:

$$y = 0$$

para un punto que está en el eje x, y sólo para el que está en el eje x. La ecuación $y = 0$, por lo tanto, está asociada a la recta horizontal de la base, al primer eje de referencia, o sea al eje de las x; podremos decir, pues, que:

$y = 0$, *es la ecuación del eje x.*

Y así también podremos decir que

$x = 0$, *es la ecuación del eje y,*

porque un punto cualquiera del eje y, y sólo un punto del eje y, tiene abscisa 0 (distancia nula al eje x).

Aún más: consideremos las dos bisectrices de los cuatro ángulos formados por los ejes x e y (ver la figura). Una de ellas atraviesa el primer y el tercer cuadrante, y la otra el segundo y el cuarto; se llaman por lo tanto bisectriz del primer y tercer cuadrante y bisectriz del segundo y cuarto cuadrante, respectivamente. Si tomamos un punto de una y otra

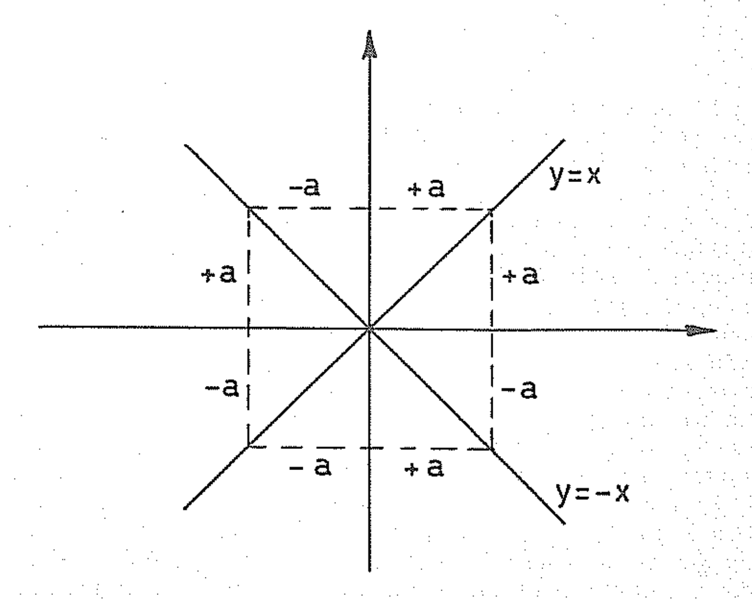


Figura 24

bisectriz, su distancia (en el sentido corriente, o mejor dicho absoluto) al eje de las x es igual a su distancia al eje y; pero nosotros no debemos fijarnos sólo en la distancia absoluta: tenemos que atribuirle el signo + o signo — basándonos en la convención de los signos. Veremos a continuación que para un punto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, la x y la y (o sea la abscisa y la ordenada) son iguales y se escriben con el mismo signo (ambas con el signo + en el primer cuadrante, y con el — en el tercero); en cambio, para un punto de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes la x y la y son iguales en distancias absolutas, pero tienen que escribirse con signos opuestos (x negativa *e* y positiva en el segundo cuadrante, y al contrario en el cuarto).

En resumen: para todos los puntos de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y sólo para ellos, tenemos:

$$y = x;$$

para todos los puntos de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes tenemos en cambio:

$$y = -x.$$

Llamaremos a estas igualdades ecuaciones de las bisectrices; será lo mismo hablar de la «ecuación $y = x$» o de la «bisectriz del primer y tercer cuadrantes», y de la «ecuación $y = -x$», o de la «bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes».

Supongamos que tenemos una carretera rectilínea, que continúa hasta el infinito por los dos lados, y con una pendiente constante del 3 %. Esto quiere decir que cada 100 metros se eleva 3 metros; cada metro (cien centímetros), tres centésimas de metro, o sea tres centímetros; cada centímetro, tres milímetros, y así sucesivamente. Si dibujamos la carretera como una recta que pasa por el origen de los ejes cartesianos, tendremos que en cada punto la relación entre la altura, o sea la ordenada, y la abscisa, o sea el desplazamiento horizontal, tiene que ser igual a 3/100 (ya que, precisamente, la «pendiente» es del «tres por ciento»). Esto se verifica también para el tramo de recta-carretera que está por debajo del eje de las abscisas, si nos basamos en las reglas de cálculo con los números negativos que hemos expuesto algunas páginas antes, como puede comprobar el lector mismo (ayudándose de los números que se ponen de ejemplo en la figura). Esto significa que para cada punto $P = (x,y)$ de la recta que tenemos, se obtiene la relación:

$$y : x = 3 : 100;$$
$$y/x = 3/100;$$

o sea:

$$100 \cdot y = 3 \cdot x;$$

y además, recordemos que según la regla *al-giabr*:

$$100\ y - 3x = 0.$$

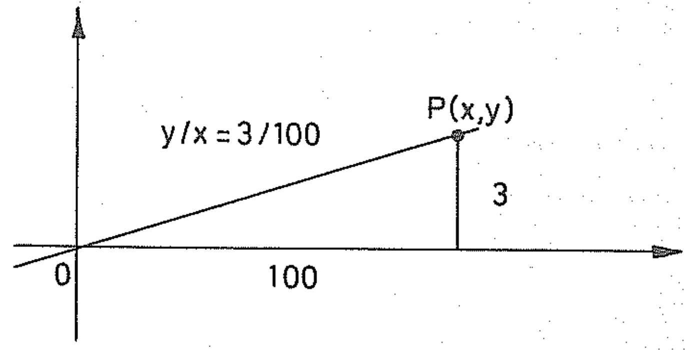


Figura 25

Esta última es una *ecuación* en x e y, o sea una igualdad que puede verificarse y puede no verificarse: depende de los valores de las letras que son los números indeterminados x e y. Ahora bien, por lo que hemos dicho, la ecuación se verifica (se suele decir «se satisface») si en lugar de x e y ponemos las coordenadas de un punto P que está en la recta que pasa por el origen y que tiene una pendiente del 3 %; en cambio no se verifica si ponemos las coordenadas de un punto que no se encuentra en esa recta.

En efecto, si un punto Q no está en esa recta, eso significa que está en una recta ⊙Q que tiene una pendiente menor o mayor del 3 %, y entonces la relación entre la y y la x de Q tiene que ser mayor, o menor, que 3/100, pues tiene que ser igual a la pendiente de ⊙Q; y si y/x es mayor o menor que 3/100, no puede ser:

$$y/x = 3/100,$$

ni por lo tanto $100y = 3x$; ni finalmente $100y - 3x = 0$.

Pero entonces da lo mismo decir que un punto P está en la recta en cuestión, que decir que $100y - 3x = 0$, porque justamente todos los puntos de la recta en cuestión, y sólo ellos, verifican con sus coordenadas (x,y) la ecuación anterior. Por eso, al igual que escribíamos: [1]

$$P \equiv -(x,y),$$

1. El símbolo: $\equiv$ es un signo igual (=) reforzado; quiere decir: *idéntico a*.

podemos escribir ahora:

«Recta por el origen con pendiente del 3 %» ecuación: «$100y - 3x = 0$.»

La ecuación asociada a una circunferencia

Tomaremos para empezar la circunferencia que tiene por centro el origen ⊙, y el radio igual a 1 (o sea con la misma longitud que la unidad de medida escogida). Consideremos ahora un punto cualquiera de ella; P, y desde él bajemos la perpendicular al eje de las abscisas. Tendremos un triángulo rectángulo (ver la figura 26) en el que la hipotenusa es el radio de la circunferencia que es igual a 1, mientras que los catetos son la abscisa x y la ordenada y del punto P. Entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$\text{(C)} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

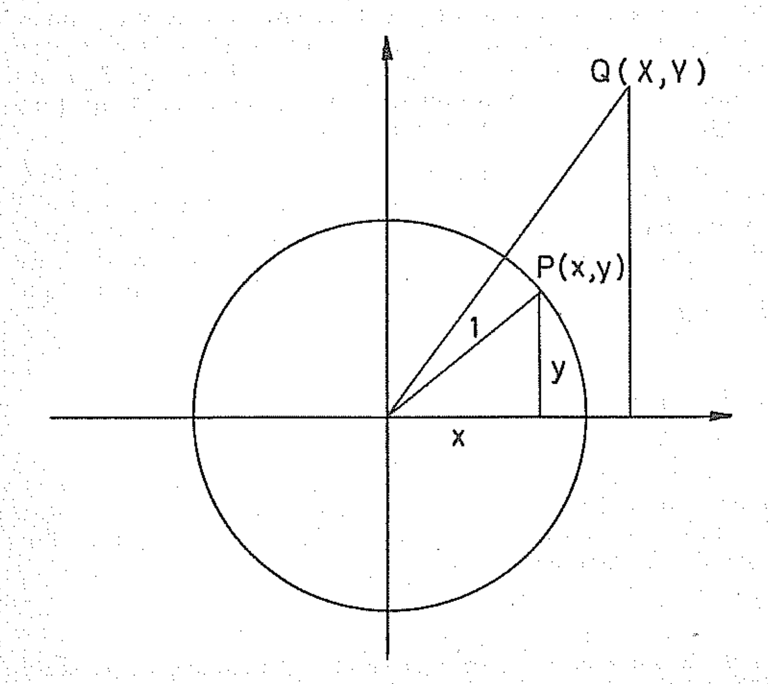


Figura 26

cualquiera que sea el punto $P = (x,y)$ de la circunferencia (ver: *respuestas a ciertas dudas*). Si en cambio se toma un punto $Q = (X,Y)$ que no está en la circunferencia, el punto Q tiene una distancia a ⊙ menor o mayor que 1, y por eso en él la suma $X^2 + Y^2$ es menor o mayor que 1. Podemos resumir estos hechos diciendo:

«circunferencia de radio 1 y centro ⊙» ≡ «ecuación (C)»; o bien, como se suele decir, que la ecuación (C) es la ecuación de la circunferencia de centro ⊙ y radio 1.

En los apéndices se dan otros dos ejemplos: el de la ecuación asociada a una *parábola*, que (eligiendo convenientemente los ejes) es:

$$y = x^2;$$

y el de la ecuación de la *hipérbole equilátera* que, tomando como ejes de coordenadas a las *asíntotas* (perpendiculares entre sí) de dicha curva, es:

$$yx = 1,$$

o sea:

$$y = 1/x.$$

6. Funciones, derivadas, integrales

y función de x

Consideremos la última ecuación que hemos escrito: $y = 1/x$. Nos permite asociar a cada valor de x (que no sea el cero) un valor de y; por ejemplo:

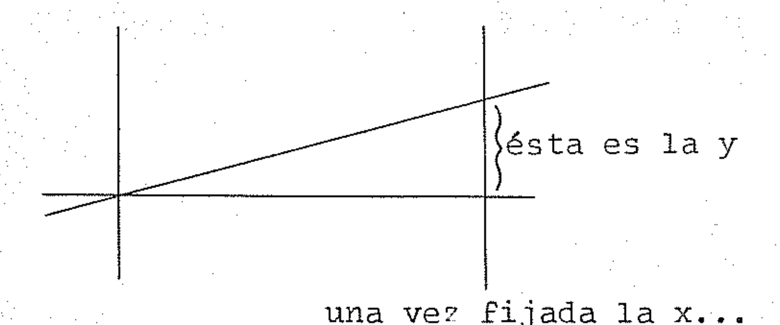
si $x = 1$	entonces	$y = 1/1 = 1$
si $x = 2$	»	$y = 1/2$
si $x = 0{,}1$	»	$y = 1/0{,}1 = 1/1/10 = 10$
si $x = -1$	»	$y = 1/-1 = -1$ (por la regla de los signos)
si $x = -3/5$	»	$y = 1/(-3/5) = -5/3$

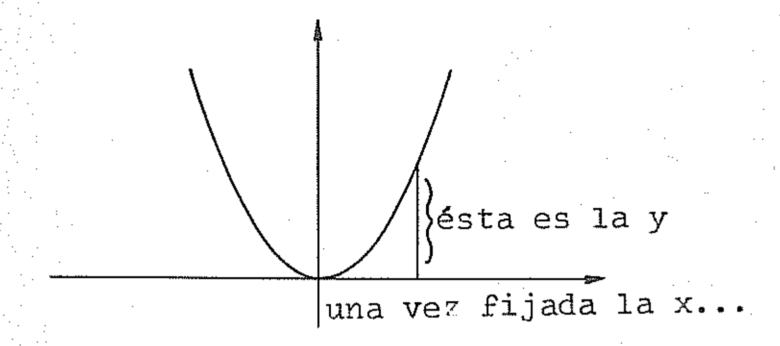
y así sucesivamente.

También en las demás ecuaciones de rectas y curvas que hemos escrito, cuando comparecen tanto la x como la y a cada valor de x se le asocian uno, o dos valores de la y: *un* valor de la y para cada valor de la x en la ecuación de la recta de pendiente 3 % (al valor x se le asocia el valor $y = 3/100x$), y asimismo en las ecuaciones de las bisectrices.

En la ecuación de la parábola, a cada x se le asocia como y el cuadrado de la misma x; en la ecuación de la circunferencia, al valor x de la abscisa de un punto se le asocian los *dos* valores de la ordenada y dados por: $+\sqrt{1-x^2}$, $-\sqrt{1-x^2}$ [un número positivo, por ejemplo 4, tiene dos raíces cuadradas, que son iguales en valor absoluto, pero de signo opuesto: $+2$ y -2; en efecto, por la regla de los signos también $(-2) \cdot (-2) = +4$]. Si en lugar de la circunferencia entera consideramos sólo la semicircunferencia que está por encima del eje x, entonces de nuevo a *un* valor de la abscisa x le corresponderá *un* solo valor de la ordenada y, dado por: $+\sqrt{1-x^2}$.

Esto tiene un significado geométrico bastante claro. Fijar el valor de la abscisa quiere decir tomar el punto de una de-





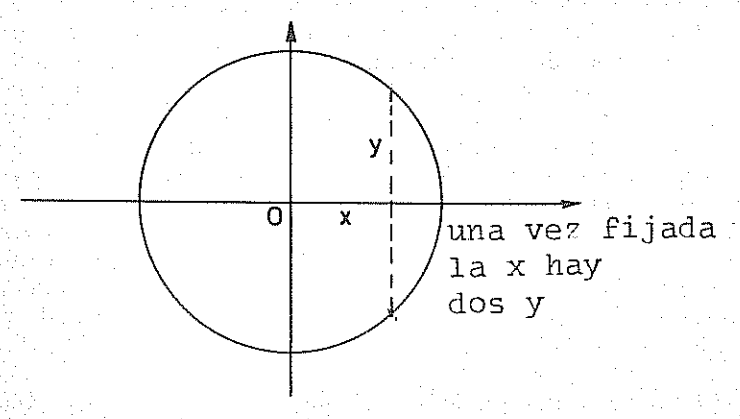


Figura 27

terminada paralela al eje *y*; entonces, correspondiendo con ese valor de la *x*, se obtendrán el punto o los puntos de intersección de esa recta con la línea citada: *un* punto en el caso de una recta, de la parábola y la hipérbole, y de la semicircunferencia, y *dos* en el de la circunferencia (ver el dibujo).

En todos estos casos se dirá que la ordenada *y* del punto móvil (que se mueve a lo largo de la recta, o de la parábola, etc.) es *función* de su abscisa *x*; *función con un valor* en el caso de la recta, la parábola y la semicircunferencia, y *función con dos valores* en el caso de la circunferencia.

También en el lenguaje de la calle se dice que una cosa es «función» de otra (o está «en función» de otra), cuando depende de ella. Si alguien dice: «Yo no tengo riquezas: mis ingresos están en función de mi trabajo», quiere decir que, si se fija una cantidad de trabajo *x*, se obtiene como consecuencia un determinado ingreso *y*. El matemático precisa las cosas y generaliza, y dice que una magnitud *y* está *en función* de otra magnitud, *x*, cuando una vez establecido un valor para la *x* se obtienen como *consecuencia uno o varios* valores determinados de la *y*. Si sólo se obtiene *un* valor de la *y*, se dirá que la *y* es una función con valor de la *x*; en caso contrario, que es una *función con varios valores*. En ambas situaciones, el hecho de que la *y* es una función de la *x* (que depende de la *x*) se expresa con el símbolo:

$$y = f(x);$$

la *x* se llama variable independiente, la *y* es la función o, también, la *variable dependiente*.

El espacio como función del tiempo x. El diagrama de un movimiento

Uno de los casos de *dependencia funcional* de una magnitud con respecto a otra, más corrientes e interesantes, lo tenemos en el movimiento de un cuerpo a lo largo de un recorrido determinado (o trayectoria). Supongamos que un coche recorre una o más vueltas de un autódromo. En el momento de la «salida» empieza a marcar el cronómetro y a moverse el coche, al que llamaremos por comodidad A. Al cabo de 1 segundo habrá recorrido, pongamos, 5 metros; al cabo de 2 segundos, 15 metros; al cabo de 3 segundos, 50 m, y así sucesivamente; al cabo de 60 segundos, es decir, al cabo del

primer minuto, habrá recorrido, por ejemplo, 2 km y medio, etc. El espacio, e, recorrido por A en los t segundos que han seguido a la salida, o sea al instante de partida (tiempo «cero»), es por lo tanto función del tiempo t que se ha empleado en recorrerlo:

$$e = f(t).$$

Podemos recurrir a un diagrama cartesiano, señalando en el primer eje (horizontal) el tiempo t, medido como queramos, por ejemplo en segundos, y en el segundo eje (vertical) el espacio e, medido por ejemplo en metros. Podremos llamarlos: *eje de los tiempos* y *eje de los espacios*, porque ahora las abscisas son los tiempos, t, y las ordenadas los espacios, e. Según este supuesto al movimiento del coche le corresponde un diagrama cartesiano, que obtendremos uniendo los puntos de coordenadas (1,5), (2,15), (3,50)..., (60,2500), etc. (al cabo de 1 segundo, 5 metros; al cabo de 2 segundos 15 metros; al cabo de 3 segundos 50 metros; ...; al cabo de 60 segundos 2500 metros o sea 2 km y medio, etc.).

Si A (esta vez no es un coche, sino más bien una tortuga) recorre un metro por segundo, el diagrama del movimiento será la recta: $y = x$ (al cabo de 1 segundo, 1 metro; al cabo de 2 segundos, 2 metros; ...; al cabo de 10 segundos, 10 metros, y así sucesivamente). En general, si A se mueve con una total regularidad, es decir si A recorre espacios iguales en tiempos iguales, el diagrama de su movimiento es una *recta;* y en este caso el movimiento se llama *uniforme*.

Los fundadores del cálculo infinitesimal

Hasta ahora hemos explicado todo lo necesario para entender otras dos ideas fundamentales de los matemáticos, que son el fundamento del *cálculo infinitesimal*, y que se deben sobre todo al alemán Godofredo Guillermo Leibniz y al inglés Isaac Newton. Decimos sobre todo porque —también en este caso— la idea estaba en el ambiente en Francia, en Italia, en Alemania y en Inglaterra.

Podríamos dar otros muchos nombres, pero nos limitaremos a citar los dos más importantes entre los italianos, además de Buenaventura Cavalieri al que ya conocemos: Evangelista Torricelli, famoso por el barómetro, amigo aunque no discípulo de Fray Buenaventura que era más viejo,

y Pietro Mengoli, discípulo de Cavalieri y sucesor suyo en la cátedra de la Universidad de Bolonia. Nos cuidaremos mucho de pararnos en la interminable polémica entre los partidarios de Newton y los de Leibniz, acerca de la prioridad del descubrimiento, o sea sobre cuál de los dos lo había descubierto antes. Leibniz sienta las bases del cálculo infinitesimal en un opúsculo de pocas páginas, publicado en 1684, en el que expone un nuevo método para determniar máximos, mínimos, tangentes a una curva y también (como veremos a continuación) áreas, longitudes y volúmenes. Newton inventa y emplea un método nuevo, con los mismos fines, en su obra monumental (1687) acerca de los *Principios matemáticos de la física (Phylosophiae naturalis principia mathematica).* Leibniz y Newton llegaron a las mismas ideas de una forma distinta, por distintas vías; no es el momento, pues, de contraponer sus nombres, sino de unirlos.

La velocidad instantánea y la idea de derivada

Volvamos a ocuparnos del movimiento de un objeto A. Si A se mueve con un movimiento uniforme, recorriendo, por ejemplo, 4 m cada segundo decimos que A procede con una *velocidad* de 4 metros por segundo (simbolizado: 4 m/seg.). En este caso recorrerá 8 m en 2 seg, 12 m en 3 seg; pero $8/2 = 12/3 = 4/1$; por lo tanto la velocidad se puede medir, en general, por la relación entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo, o sea que:

$$v = e/t.$$

Pero las cosas se complican bastante cuando el movimiento de A no es uniforme. Supongamos de nuevo que A es un coche que corre por un circuito de 2,5 km (con forma de anillo); nosotros nos encontramos exactamente en la línea de la meta, y observamos que cuando A pasa como una flecha por delante de nosotros, al final de la segunda vuelta (o sea a los 5 km), han pasado exactamente 90 segundos, o sea un minuto y medio. Hagamos entonces nuestro cálculo de esta forma: en una hora hay $60 \cdot 60 = 3600$ segundos; $3600 : 90 = 40$; si en 90 segundos ha recorrido 5 km, en 3600 recorrerá 40×5, es decir que recorrerá 200 km; A marcha «a una media» de 200 km/h (200 kilómetros por hora).

Toda la diferencia entre la definición de velocidad que dimos antes, en el caso del movimiento uniforme, y el cálculo

que hemos hecho ahora, estriba en esas tres palabras: «a una media». En el caso del movimiento no uniforme, en efecto, razonamos de esta forma: «A ha recorrido 5 km en 90 segundos; si hubiera avanzado con un movimiento uniforme, su velocidad hubiera sido de 200 km/h.» En realidad, A habrá ido acelerando al principio luego habrá frenado en una curva, y se habrá lanzado a «todo gas» en la recta: si hay varios cronometradores, se podrá comprobar entonces que en un primer tramo la velocidad media ha sido de 120 km/h, en otro de 250 km/h, y en otro de 180 km/h.

Pero si quiero saber qué velocidad tiene el coche cuando pasa por delante mío, en el instante mismo en que pasa como una flecha, ¿qué tengo que hacer? ¿Y qué es lo que significa exactamente: *velocidad instantánea*, velocidad en un determinado instante, que no tiene duración?

La primera respuesta precisa a esta pregunta ha sido, justamente, la de Newton y Leibniz. El cálculo infinitesimal, y especialmente la parte de él que se llama *cálculo diferencial*, no sólo nos explica con precisión el significado de velocidad instantánea, sino que también nos permite calcularla a partir de la *ecuación del movimiento*, o sea de la ecuación $e = f(t)$, que nos da el espacio recorrido e en función del tiempo t empleado en recorrerlo. Nosotros aquí no podemos, ni siquiera por encima, explicar la forma en que se tienen que hacer los cálculos: sólo podemos hacer algunos comentarios, sin profundizar mucho, acerca del concepto de velocidad instantánea.

Supongamos que queremos definir, y calcular, la velocidad instantánea de A en el décimo segundo después de iniciado el movimiento, o sea para $t = 10$. Podemos proceder de esta forma: consideremos el espacio recorrido entre el octavo y el doceavo segundo: será igual a la diferencia $E_1 - e_1$, entre el espacio E_1 recorrido en 12 segundos y el espacio e_1 recorrido en 8 segundos. La velocidad media del intervalo de tiempo de 4 segundos entre el octavo y el doceavo segundo es entonces la relación $(E_1 - e_1)/4$, entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo. Acortemos ahora el intervalo de tiempo, y consideremos el espacio $E_2 - e_2$ recorrido entre el noveno y el undécimo segundo: entonces obtendremos una nueva velocidad media, $E_2 - e_2/2$. Vamos a suponer que procedemos de esta forma indefinidamente, tomando velocidades medias relativas en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, siempre incluyendo el instante que nos interesa. Se puede intuir que, salvo que se produjeran unas imprevistas y enormes variaciones de velocidad *(aceleraciones)*, estas velocidades medias se acercarán cada vez más a un *valor-límite:* este valor lo consideramos la velocidad en el instante dado. La velocidad, pues, sigue apareciendo como una relación entre el espacio y el tiempo, pero entre un espacio infinitésimo (es decir, infinitamente pequeño) y el tiempo infinitésimo empleado en recorrerlo, y no ya entre el espacio finito, que no «se desvanece», recorrido en un intervalo de tiempo medible, y ese intervalo de tiempo. Ya no basta con el cálculo ordinario que opera con magnitudes finitas; hace falta un cálculo especial que consiga operar con magnitudes que se hacen cada vez más pequeñas, aun conservando su relación: se necesita un cálculo infinitesimal. Considerando la expresión del movimiento: $e = f(t)$, se dice entonces que la velocidad y en el instante t es la *derivada* de la función $e = f(t)$ calculada para $t = T$, o sea la relación entre un espacio infinitesimal y un tiempo infinitesimal, que incluye el instante T que se ha empleado en recorrerlo (para el simbolismo, ver el apéndice núm. 18).

Área e integral

También al hablar del nuevo método de Leibniz y Newton para la determinación de longitudes, áreas y volúmenes, sólo trataremos de dar una idea... de la idea; y esto en un caso concreto, el cálculo de un área plana limitada por una curva.

NOTA. (Conviene mirar siempre las figuras, o mejor aún hacerlas uno en un papel.) El problema es el siguiente: calcular el área plana comprendida entre el eje de las abscisas, el arco de curva y las ordenadas de los dos extremos. Observemos ahora la figura: la idea es bastante clara y es similar a la de Arquímedes para rectificar la circunferencia. En vez de calcular el área exacta, calculemos el área, más pequeña, formada por muchos rectangulitos inscritos, o también el área más grande, formada por muchos rectangulitos circunscritos. La novedad con respecto a Arquímedes empieza ahora: podemos escribir estas sumas (de las áreas de los rectángulos) en números, si sabemos que el arco de la curva tiene la ecuación: $y = f(x)$ (es decir, si la y de cada uno de sus puntos se obtiene a partir de la x de ese punto mediante ciertas operaciones simbolizadas por esa f). Consideremos los rectángulos inscritos: los puntos de división en el eje de las abscisas tienen como abscisas x_1, x_2, x_3, etc. (se lee «x sub uno», « x sub

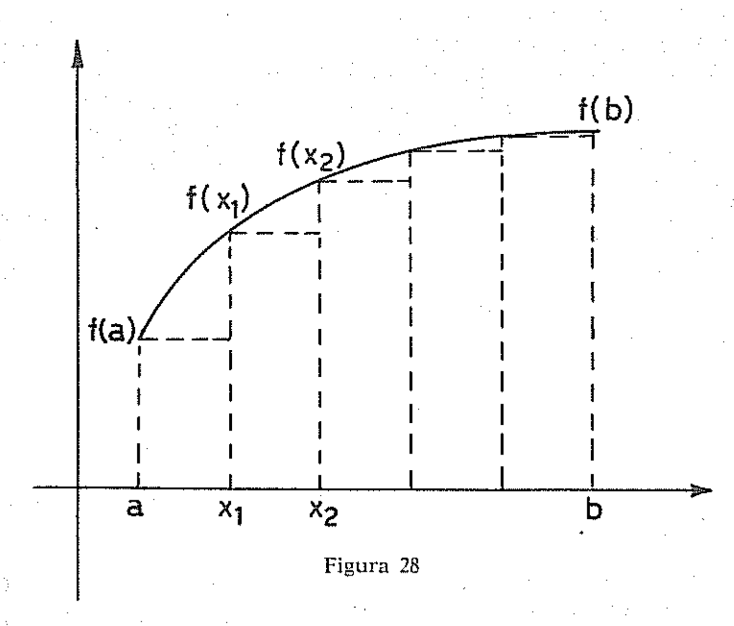


Figura 28

dos», etc.) que son simplemente distintos valores de x: un primero, un segundo, un tercero, y así sucesivamente. Según esto las correspondientes y tendrán los valores:

$f(x_1)$, $f(x_2)$, etc., si, por ejemplo, ese símbolo f indica una elevación al cuadrado, para x igual a x_1, y será igual a x_1^2, etc.; o sea, si $x = 0$, $y = f(0) = 0$; si $x = 1$, $y = 1^2 = 1$; si $x = 2$, $y = 2^2 = 4$, etc.

Por lo tanto, la medida del área por defecto será:

$$(x_1 - a)\ f(x_1) + (x_2 - x_1)\ f(x_2) +, \text{ etc.}$$

porque el área de cada rectángulo es igual a la base por la altura, y en nuestro caso las bases son los tramos $(x_1 - a)$, $(x_2 - x_1)$, etc., y las alturas los valores $f(x_1)$, $f(x_2)$, etc., de la ordenada y.

La medida del área por exceso se obtendrá de un modo análogo a partir de los rectángulos circunscritos. Si aumentamos el número de rectángulos inscritos y circunscritos, disminuyendo la anchura de sus bases, o sea subdividiendo en partes más pequeñas la base de toda la figura, tendremos una aproximación mejor (por defecto o por exceso), es decir, conseguiremos un margen de error más pequeño. Se puede intuir que, si procedemos así indefinidamente, siempre que la curva tenga un contorno bastante regular, nos acercaremos a un valor límite, que será exactamente el área de la región plana en cuestión. Este procedimiento se llama *integración*, y el valor límite *integral (definida) de la función $f(x)$ extendido al intervalo de extremos a y b* (para la notación, ver apéndice núm. 18). Tampoco en este caso nos sirve el cálculo ordinario, que nos enseña a sumar un número finito de superficies finitas, que no «se desvanecen» (por decirlo de alguna forma); hace falta un nuevo tipo de cálculo, que nos permita sumar infinitos sumandos infinitamente pequeños, un *cálculo infinitesimal*.

La idea que hemos expuesto de una forma tan escueta (demasiado escueta) es un perfeccionamiento de la explicación de los *indivisibles*, dada por Arquímedes y Cavalieri. De todos modos hay dos diferencias muy notables. En primer lugar, el área no se divide nunca en hilos infinitamente delgados, o sea en líneas paralelas que la recubren, sino que se la aproxima con áreas, sumas de pequeños rectángulos, cada vez más pequeños pero nunca filiformes. En segundo lugar, aprovechando la idea cartesiana de las coordenadas de un punto y de la ecuación de una curva, se elabora una expresión algebraica, que no sólo nos da una medida cada vez más aproximada al área que buscamos según va aumentando la subdivisión de la base, sino que al límite nos da exactamente el área que buscamos.

Ahora bien, Newton y Leibniz han sido precisamente los primeros que han encontrado un método más o menos automático, para poder calcular ese límite. Esta «máquina» se llama *integración*, y es relativamente complicada: pero la idea base para su construcción, que acabamos de esbozar, es, en esencia, bastante sencilla.

Conclusión de una historia que no admite conclusiones

Ésta es la última gran idea sencilla y genial de nuestra historia. La última, porque con ella concluye un período de la historia del pensamiento matemático. Pero en cambio se abre otro, en el que todavía hoy vivimos, que cada vez está más lleno de maravillas, también en el campo matemático, como por ejemplo los grandes ordenadores electrónicos. La

historia de las matemáticas, después de Newton y Leibniz, está aún llena de ideas sencillas que han revolucionado el saber, que han abierto mundos nuevos, desconocidos para la mente humana. Sencilla es la idea de Gauss, de Lobachevski, de Bolyai, quienes no se conforman con que la suma de los ángulos internos de un triángulo de cualquier tamaño tenga que ser necesariamente igual a dos rectos, y osan imaginar una geometría «astral», no euclidiana, anti-euclidiana. Son sencillas las ideas del gran Bernardo Riemann, quien, desarrollando el punto de partida de Gauss y Lobachevski, nos ha enseñado a hablar de *espacios* y de *geometrías* en plural, es más... en infinitamente plural. Sencilla es la idea en que se basa el *Ars conjectandi* (1713), el «arte de conjeturar» de Jacobo Bernouilli que hoy llamamos cálculo de probabilidades, cuyo origen está en los problemas surgidos... en el juego de los dados o de las cartas.

Sencillas fueron muchas otras ideas geniales, como la del francés Henri Lebesgue (1912) que entendió a fondo el concepto de *dimensión* cuando, para descansar del estudio, estaba construyendo una pared de ladrillos en su jardín y le chocó el hecho de que en muchos puntos de la pared se tenían que juntar los bordes de por lo menos tres ladrillos.

Éstas y otras son algunas historias de las *ideas de las matemáticas* más recientes que el autor contaría de buena gana a los muchachos. Pero... ¿y si estuviera ya hablando solo y el auditorio se hubiera esfumado sin darse él cuenta? Antes de continuar conviene que sepa si estas «aventuras matemáticas» han sido entendidas por los muchachos, por lo menos por los más pacientes y reflexivos, y les han apasionado.

APÉNDICES

APÉNDICE NÚM. 1

La numeración de los antiguos romanos

Los principales signos fundamentales:

I = uno — un dedo:
V = cinco — una mano:
X = diez — las dos manos:

L = cincuenta, C = cien, D = quinientos, M = mil.

Las reglas para formar los números a partir de los signos fundamentales:

1. *Adición de signos contiguos* (numeración «aditiva»): si dos números están escritos uno después del otro, y si el primero no es más pequeño que el segundo, entonces el segundo se suma al primero. Así se obtienen a partir del I (= uno) y del V (= cinco) los números:

II = I + I = dos; III = I + I + I = tres;
VI = V + I = seis;
VII = V + I + I = siete; VIII = V + I + I + I = ocho.

2. *Sustracción de signos contiguos:* se resta un número del que le sigue, si el primero es más pequeño que el segundo. Así se obtienen a partir del I, el V y el X los números:

IV = V — I = cuatro; IX = X — I = nueve; que nos permiten completar la numeración del I a X.

Las dos reglas se pueden combinar

Por ejemplo:

XIX = X + (X — I) = diecinueve;
CXLVI = C + (L — X) + (V + I) = ciento cuarenta y seis;

MMMMDCCCLXXXIV = (M + M + M + M) + (D + C + C + C) + (L + X + X + X) + (V — I) = cuatro mil ochocientos ochenta y cuatro = 4884.

NOTA. Observemos que, para escribir el número «cuatro mil ochocientos ochenta y cuatro» con el método de los romanos se necesitan *catorce* signos, mientras que para el mismo número basta con *cuatro* cifras arábigas.

APÉNDICE NÚM. 2

La regla turca

Cerremos los puños; luego, dados dos números entre el 6 y el 9, levantemos en una de las dos manos tantos dedos como unidades hay que añadir al número 5 para obtener el primer número, y hagamos lo mismo para el segundo número con la otra mano. Es decir: que para indicar, en una mano, el 6, levantaremos un solo dedo, por ejemplo el índice; para indicar el 7 dos dedos, por ejemplo el índice y el medio, y así sucesivamente. ¿Queremos saber cuánto es 7 por 8? Sumemos los dedos levantados en la mano correspondiente al 7, que son *dos*, y los que hay levantados en la mano correspondiente al 8, que son *tres:* tres más dos = cinco. Multipliquemos entre sí el número de dedos doblados de cada mano (los dedos que no hemos levantado) entre sí: ese número es tres en la mano correspondiente al 7, y dos en la correspondiente al 8: tres por dos = seis. La primera cifra obtenida nos da las *decenas*, y la segunda las *unidades*: cinco decenas más seis unidades quiere decir 56, que es precisamente el producto de 7 por 8.

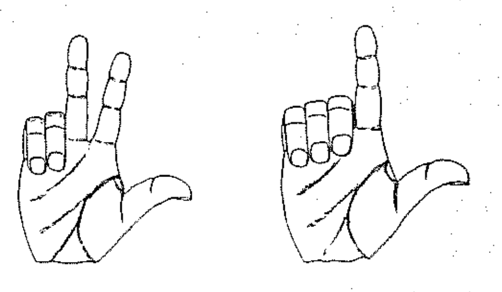


Figura 29

No es un azar, siempre sale bien, incluso en el caso menos elegante, el de 6 por 6. (Para indicar cada 6 se levanta *un* dedo y se dejan doblados *cuatro*; al calcular el producto por la regla turca obtengo $1 + 1 = 2$ decenas, y $4 \times 4 = 16$ unidades, o sea $20 + 16 = 36 = 6 \times 6$.)

Para los mayores. La justificación de la regla turca no es tan fácil, requiere cierto dominio del *cálculo literal*. Dos números comprendidos entre el 6 y el 9 se podrán escribir de la forma: $10 - a$, y $10 - b$, donde esas letras, a y b, querrán decir, según los casos, 1, 2, 3 ó 4 ($9 = 10 - 1$; $8 = 10 - 2$; $7 = 10 - 3$; $6 = 10 - 4$).

Realicemos el producto:
$(10 - a) \times (10 - b) = 100 - 10\,(a+b) + ab = 10\,(10 - a - b) + ab.$

El resultado nos indica que el producto buscado es un número compuesto por $(10 - a - b)$ decenas, y por ab unidades. Pero a y b son los números de los dedos que hay que dejar doblados, respectivamente, en la primera y en la segunda mano, para obtener los números $10 - a$ y $10 - b$; puesto que los dedos levantados son en total diez, entonces: $10 - (a + b) = 10 - a - b$ es el número de todos los dedos levantados, lo que justifica la regla turca.

APÉNDICE NÚM. 3

La regla de Pitágoras para calcular el cuadrado de un número

El primer número impar es: 1

luego el número: 1
tiene por cuadrado: 1

Los 2 primeros números impares son: 1 y 3

luego el número: 2
tiene por cuadrado su suma: $1 + 3 = 4$

Los 3 primeros números impares son: 1, 3 y 5

luego 3 tiene por cuadrado su suma: $1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3$

Los 4 primeros números impares son: 1, 3, 5, 7

4 al cuadrado = 4^2 = su suma = $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Los 5 primeros impares son: 1, 3, 5, 7, 9

$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

Los 6 primeros números impares son: 1, 3, 5, 7, 9 11

$6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

Los 7 primeros números impares son: 1, 3, 5, 7, 9, 11 13

por lo tanto el cuadrado de 7 es: $7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$.

Por lo tanto, para tener el cuadrado de 8 basta con añadir al cuadrado de 7 el octavo número impar: $8^2 = 49 + 15 = 64$; para obtener el cuadrado de 9 basta con añadir al cuadrado de 8, que es la suma de los 8 primeros números impares, el noveno número impar, que es el 17: $9^2 = 8^2 + 17 = 81$.

Se puede seguir así hasta el número que se quiera. El cuadrado de 20, por ejemplo, será la suma de los primeros 20 números impares (que son 1, 3, 5, ..., 39). La regla puede servir también al revés. Apostemos con un amigo que en un máximo de diez segundos somos capaces de hacer la suma de los primeros *cien* números impares (*respuesta inmediata*: es el cuadrado de 100, o sea 100 por 100, que es 10.000).

APÉNDICE NÚM. 4

Apliquemos la regla de Pitágoras para medir los espacios recorridos por una piedra que dejamos caer desde lo alto

Para los mayores. Cuando un cuerpo pesado, o, como se suele decir, un «sólido», se deja caer de una forma natural, o sea abandonándolo a la fuerza de la gravedad sin darle ningún impulso inicial, se sabe que el espacio recorrido es proporcional al cuadrado del tiempo empleado en recorrerlo. Es la famosa ley de la caída libre de los sólidos de Galileo Galilei. En otras palabras: en *dos* segundos el sólido recorrerá un espacio de caída (vertical) *cuatro veces* mayor que el atravesado en el primer segundo; en *tres* segundos *nueve* veces, en *cuatro* segundos *dieciséis* veces ese primer tramo de caída (es decir, el recorrido del primer segundo), y así sucesivamente.

Ahora bien, por la regla pitagórica (ver apéndice núm. 3) sabemos que los espacios recorridos en el primer segundo, en el segundo, en el tercero, etc., son proporcionales a uno, tres, cinco, siete,

etcétera, es decir que los espacios recorridos en los sucesivos segundos guardan entre sí la misma relación que los números impares sucesivos. Es decir, que en el segundo segundo el cuerpo que cae atraviesa un espacio tres veces mayor que el recorrido durante el primer segundo de caída libre, en el tercero, cinco veces mayor, en el cuarto, nueve veces, y así sucesivamente. Por medidas minuciosas se sabe que el espacio recorrido en el primer segundo de caída libre por un sólido (independientemente de la «masa») es de unos 4,90 m: entonces en el segundo siguiente el recorrido será de $3 \times 4.90 =$ 14,70 m; en el tercer segundo de $5 \times 4{,}90 = 24{,}50$ m, y así sucesivamente.

APÉNDICE NÚM. 5

Numeraciones en bases distintas de diez

En base cinco:

Las «unidades» son los números menores de cinco; se utilizan los símbolos de costumbre:

0 = cero; 1 = uno; 2 = dos; 3 = tres; 4 = cuatro.

En lugar de decenas, las unidades se agrupan en cinquenas: de igual forma que en base diez, una decena se escribe: 10 (una decena + ninguna unidad), en base cinco una cinquena se escribe 10 (una cinquena + ninguna unidad).

De la misma manera que diez decenas se agrupan en una centena, así cinco cinquenas se agrupan en una veinticinquena; de la misma manera que diez centenas se agrupan en un millar, así cinco veinticinquenas se unen para formar una cientoveinticinquena.

Por eso, en base cinco:

100 = veinticinco (una veinticinquena + ninguna cinquena + ninguna unidad);

1.000 = ciento veinticinco (una cientoveinticinquena + ninguna veinticinquena + ninguna cinquena + ninguna unidad).

Por eso, en base cinco:
10 = cinco; 11 = seis (una cinquena + una unidad); 12 = siete; 13 = ocho; 14 = nueve; 20 = diez (dos cinquenas + ninguna unidad); 21 = once; 22 = doce; 23 = trece; 24 = catorce (dos cinquenas + 4 unidades); 30 = quince (tres cinquenas + ninguna unidad); 40 = vein-

te; 41 = veintiuno; 42 = veintidós; 43 = veintitrés; 44 = veinticuatro (cuatro cinquenas + cuatro unidades);

100 = veinticinco; 101 = veintiséis; 111 = treinta y uno (una veinticinquena + una cinquena + una unidad); hasta 144 = cuarenta y nueve (una veinticinquena + cuatro cinquenas + cuatro unidades); después:

200 = cincuenta (dos veinticinquenas); 300 = setenta y cinco (tres veinticinquenas); 400 = cien (cuatro veinticinquenas); hasta: 444 = ciento veinticuatro;

1.000 = ciento veinticinco; 2.000 = doscientos cincuenta; 3.000 = trescientos setenta y cinco; 4.000 = quinientos; hasta 4.444 = seiscientos veinticuatro = quinientos + cien + veinte + cuatro = cuatro veces ciento veinticinco + cuatro veces veinticinco + cuatro veces cinco + cuatro veces uno.

El primer número de cinco cifras será entonces:
10.000 = cinco veces ciento veinticinco = seiscientos veinticinco = cinco × cinco × cinco × cinco, cinco a la cuarta potencia;

el primer número de seis cifras será:
100.000 = tres mil ciento veinticinco = cinco por seiscientos veinticinco = cinco a la quinta potencia;

y así sucesivamente.

En otras bases

Base *tres:* 10 = tres; 100 = tres al cuadrado = nueve; 1.000 = tres al cubo = veintisiete; 10.000 = tres a la cuarta potencia = ochenta y uno. Por ejemplo: el número:

2.122

se lee así:
dos veces veintisiete + una vez nueve + dos veces tres + dos = setenta y uno.

NOTA. Son suficientes tres cifras: 0, 1 y 2.

Base *once:* 10 = once; 100 = once por once = ciento veintiuno; 11 = un once + un uno = 12; 111 = ciento veintiuno + un once + un uno = ciento treinta y tres.

NOTA. Como diez es menor que once, el número diez figura entre las unidades: habrá que «inventar» una nueva cifra para indicar el número diez en la numeración en base once.

APÉNDICE NÚM. 6

La numeración «en base dos», o, son suficientes las cifras 0 y 1 para escribir un número cualquiera

Dado un número cualquiera, se puede descomponer en la suma de:
unidades (ninguna o una) + pares (ninguno o uno) + cuaternas (ninguna o una) + octetos (ninguno o uno) + «dieciseisenas» (ninguna o una) + lo que sigue tomando las sucesivas potencias de dos (cuatro = dos × dos = dos a la segunda; ocho = dos a la tercera; dieciséis = dos a la cuarta; treinta y dos = dos a la quinta; sesenta y cuatro = dos a la sexta, etc.). Entonces los números se escriben así:

1 = uno = una unidad; 10 = dos = un par + cero unidades;
11 = tres = un par + una unidad;
100 = cuatro = una vez dos a la segunda + cero veces dos + cero unidades;
101 = cinco = una vez dos a la segunda + cero veces dos + una unidad;
110 = seis = una vez dos a la segunda + una vez dos + cero unidades;
111 = siete = una vez dos a la segunda + una vez dos + uno;
1.000 = ocho = una vez dos a la tercera potencia + cero veces dos a la segunda + cero veces dos + cero unidades;
1.001 = nueve = todo igual que el anterior, salvo que al final hay una unidad en lugar de cero;
1.010 = diez = una vez dos elevado a la tercera + cero veces dos a la segunda + una vez dos + cero;
1.011 = once = una vez dos a la tercera + cero veces dos al cuadrado + una vez dos + uno;

y así sucesivamente hasta llegar a:

1.111 = una vez ocho + una vez cuatro + una vez dos + uno = quince. Luego:
10.000 = dieciséis = dos a la cuarta potencia (tantos ceros como sea el exponente de la potencia del dos, o sea cuatro); hasta:
11.111, que quiere decir: treinta y uno. *¿Por qué?* —Y luego 100.000 = ?; y luego...

APÉNDICE NÚM. 7

¡No te fíes de lo que ves!, o la multiplicación de los cuadrados

He aquí cómo se consigue (¡cuidado con los trucos!) romper un tablero de ajedrez de 64 cuadros en cuatro partes, y volver a unirlas de modo que salgan 65 cuadros iguales que los anteriores: ¡uno más, sin añadir nada!

Mirad las dos figuras. ¿No son iguales las cuatro partes en que están divididas? En efecto, tanto una como otra están divididas en dos triángulos rectángulos de base 8 y altura 3, y en dos trapecios rectángulos que tienen una altura de 5 y las dos bases paralelas de 5 y 3. Y sin embargo el cuadrado contiene 8 por 8, o sea 64 cuadros, mientras que el rectángulo contiene 13 por 5, es decir 65. ¿Qué es lo que pasa aquí?

¡Mucho cuidado con la segunda figura! Las inclinaciones de la hipotenusa (lado largo) de un triángulo y del lado oblicuo del trapecio *no* son iguales. En efecto, la hipotenusa se eleva tres cuadros por cada ocho, o, si prolongamos imaginariamente la recta que la contiene, quince cuadros por cada cuarenta ($5 \cdot 3 = 15$, $5 \cdot 8 = 40$, y la elevación es uniforme); mientras que el lado oblicuo del trapecio, alzándose dos cuadros por cada cinco de despla-

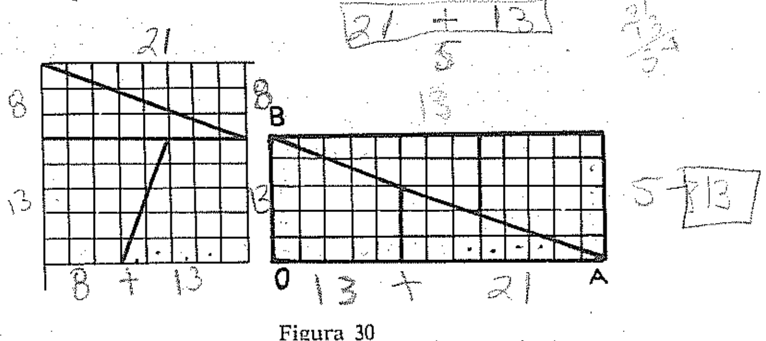


Figura 30

miento horizontal, se elevará *dieciséis* cuadros por cada cuarenta ($8 \cdot 2 = 16$, $8 \cdot 5 = 40$); lo que significa que es más «escarpado» que la hipotenusa. La vista, pues, nos engaña haciéndonos creer que la línea que va de A a B tal como la hemos dibujado es una recta: y sin embargo es una *quebrada*, formada por tramos de recta de distinta inclinación. Por ejemplo, en el segundo dibujo, tal como lo hemos hecho, se puede apreciar, incluso a simple vista (pero después de que la mente nos haya puesto en guardia), que la hipotenusa del triángulo de abajo a la derecha, después de cinco cuadros

de derecha a izquierda, se ha levantado *un poco menos* que dos lados de cuadro, mientras que en el triángulo de arriba a la izquierda del segundo dibujo, la hipotenusa, después de cinco «pasos» de izquierda a derecha, baja exactamente dos cuadros. Esto significa que si en el triángulo grande A ⊙ B trazamos la *verdadera* hipotenusa, quedará un poco más baja que la falsa hipotenusa del dibujo, formada en realidad por tramos de recta diferentes; son estas pequeñas diferencias, casi imperceptibles ya sea al mirar, como al cortar o pegar, las que forman el cuadro de más.

APÉNDICE NÚM. 8

Ninguna fracción tiene por cuadrado dos

($\sqrt{2}$ es un número irracional)

Supongamos que existe una fracción, de numerador m y denominador n, que tenga por cuadrado el número 2. Las letras m y n indican dos números enteros; podemos suponer que los números m y n son primos entre sí, porque si tuvieran un factor común siempre podríamos eliminarlo, dividiendo por él tanto el numerador m como el denominador n (por ejemplo, si $m = 14$ y $n = 10$, en su lugar podemos poner los números 7 y 5, obtenidos a partir de los anteriores eliminando el factor común 2, porque: $14/10 = 7/5$). Por lo tanto, tendría que ser:

$$(m/n)^2 = 2, \text{ o sea:}$$
$$m^2/n^2 = 2, \text{ y entonces:}$$
$$m^2 = 2n^2.$$

m y n, siendo primos entre sí, no pueden ser *pares* los dos. Entonces pueden darse tres casos:

1) m es impar y n es también impar; 2) m es impar y n es par; 3) m es par, y n es impar.

Vamos a demostrar que los tres casos son *imposibles*.

El caso 1) hay que descartarlo. En efecto, si m y n son impares, también lo serán m^2 y n^2 (el cuadrado de un número contiene los mismos factores que el número, cada uno repetido dos veces; si un número no es divisible por 2, tampoco lo es su cuadrado). Pero el doble de n^2, o sea $2n^2$, es par, y no puede ser igual al número impar m^2:

$$m^2 \neq 2n^2 \text{ (el símbolo } \neq \text{ significa «distinto de...»).}$$

El caso 2) es *imposible*. En efecto, si m es impar, m^2 es impar mientras que, al igual que antes, $2n^2$ es par (ya n^2 lo es). Otra vez tenemos:

$$m^2 \neq n^2.$$

Finalmente, también el caso 3) es imposible de verificar. En efecto, si m es par, es divisible por lo menos por 2 (y a lo mejor también por una «potencia» de 2), y por eso su cuadrado es divisible al menos por $2 \cdot 2 = 4$. Si n es impar, n^2 es también impar, $2n^2$ es divisible *sólo* por 2, y no por 4; por tanto:

$$m^2 \neq n^2,$$

porque el primer número es divisible por 4, y el segundo no. Por lo tanto:

No existe ninguna fracción, y ningún número entero (caso particular) que tenga por cuadrado el número 2.

Demostración geométrica. Consideremos la medida de la diagonal de un cuadrado con respecto a su lado, y llamemos d a esa medida. Por el teorema de Pitágoras, si hacemos la longitud del lado igual a 1, es decir si tomamos el lado como «metro», tenemos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Por eso:

La diagonal de un cuadrado es inconmensurable con el lado; su medida con respecto al lado, que es la raíz cuadrada de 2 ($\sqrt{2}$) no es un entero o una fracción, o sea un número racional, sino un número irracional (con infinitas cifras decimales y no periódico).

APÉNDICE NÚM. 9

La escudilla de Luca Valerio

Tomemos un cilindro, de modo que su altura sea la mitad del diámetro de su círculo de base. Quitemos, «raspemos» del cilindro la media esfera que está dentro de él, que tiene su centro en el centro de la base superior, y el radio igual a la altura del cilindro. Nos queda, como podéis ver, una especie de *escudilla* (la llamamos la escudilla de Luca Valerio porque el razonamiento que exponemos a continuación es obra de un matemático de finales del siglo XVI, muy estimado por Galileo). Comparemos esta escudilla con el cono circular recto que tiene la misma base y la misma altura que el cilindro. Comparémoslos considerando que están formados por infinitas «hojas» infinitamente delgadas que se obtienen seccionándolos con planos paralelos a sus bases. Tomemos, por ejemplo, una hoja que esté a una distancia h de la base superior. La sección con el cono es un círculo de radio también h (ya que los lados del cono forman ángulo de 45°, y por lo tanto el triángulo rectángulo del dibujo es isósceles); por eso el área de esta «hoja circular» está dada por πh^2. En cambio, la sección del mismo plano con la escudilla es una corona circular, que es la tira comprendida entre dos círculos concéntricos. Uno de ellos es igual al círculo-base de la escudilla, y por lo tanto su área es πr^2. El otro, el más pequeño, tiene por radio el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es r, siendo h el otro cateto: su radio (por el teorema de Pitágoras) será entonces: $\sqrt{r^2 - h^2}$, y su área: $\pi (r^2 - h^2)$. El área de la corona circular se obtendrá restando del área del círculo mayor la del menor, por lo que el área de la hoja o pequeño estrato con forma de corona circular cuya distancia a la circunferencia que limita por arriba a la escudilla, es h, se obtiene a partir de: $\pi r^2 - \pi(r^2 - h^2) = \pi r^2 - \pi r^2 + \pi h^2$ (ver, más adelante, las reglas del cálculo con números negativos), o sea de: πh^2: es igual que la correspondiente hoja circular obtenida en el cono. Pero entonces los dos volúmenes, formados por «estratos» de la misma área, son iguales:

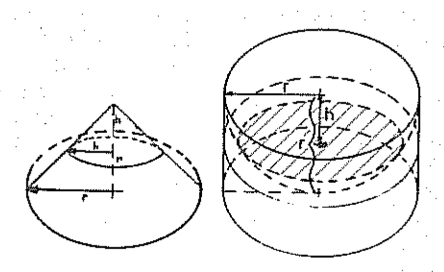


Figura 31

El volumen de la escudilla es igual al del cono que tiene la misma base y la misma altura

De aquí se deduce con facilidad un famoso resultado de Arquímedes, el volumen de la esfera. En efecto, la media esfera es igual al cilindro menos la escudilla, o sea al cilindro menos el cono; ahora bien, sabemos que el volumen de un cono es un tercio del de un cilindro que tenga la misma base y la misma altura. Por lo tanto, el volumen de la media esfera es igual al del cilindro menos un tercio del mismo, o sea que es igual a dos tercios del volumen del cilindro; si lo multiplicamos por dos:

El volumen de la esfera es igual a los 4/3 del de un cilindro que tenga por base un círculo máximo de la esfera, y por altura su radio.

APÉNDICE NÚM. 10

Un área medida por Galileo con la balanza y por Torricelli con la mente

Tomemos un disco circular, apoyado en el suelo en un punto P de su circunferencia, que señalaremos en rojo para no perderlo de vista. Imaginemos ahora que el disco rueda, sin arrastrarse, en línea recta, realizando un solo giro, o sea hasta el momento en que el punto P señalado en rojo vuelve a tocar el suelo. El «punto rojo» recorre entonces un arco: durante la primera mitad del giro se va levantando, hasta llegar en la mitad exacta del giro al punto más alto del disco; en la segunda mitad va bajando hasta volver al suelo. El arco descrito se llama arco de *cicloide.* Esta curva fue muy estudiada por Galileo Galilei. Escribe Carlo Dato (con el seudónimo de Timauro Anziate): «Vincenzo Viviani... que vivió durante tres años en contacto con Galileo, me ha dicho que le ha oído hablar muchas veces de la cicloide, y particularmente tratándose del diseño del nuevo puente de Pisa, cuando se propuso hacerlo de un solo arco, diciendo que esta línea suministraba una cimbra para un puente de mucho garbo. Y que yendo más allá había especulado mucho para medir su espacio» (es decir, su área) «sospechando que era el triple de su círculo generador». Dad un vistazo a la figura, y seguramente tendréis la misma «sospecha». «Pero... habiendo hecho el experimento de pesar una figura de un cartón muy uniforme y habiéndola encontrado siempre menor del triple, y dudando que la proporción fuera irracional, la abandonó, aunque no dejó de animar a otros a que la encontraran, como también animó al mismo Viviani.»

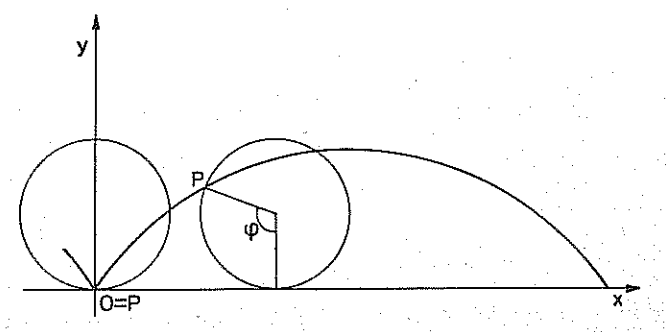


Figura 32

¿Cómo se las arreglaba Galileo para medir, aunque fuera aproximadamente, el área de una figura «con una pesada»? Es algo muy sencillo, y probablemente, incluso diría que ciertamente, ya Arquímedes utilizaba, casi dos mil años antes, el mismo sistema para «hacerse una idea» del resultado, antes de buscar una demostración geométrica precisa. Galileo quería comparar el área del cicloide con la de su «círculo generador». Tomaba entonces un «cartón muy uniforme», es decir de espesor muy igual, y recortaba con la mayor precisión posible las dos figuras que se tenían que comparar: el círculo y el arco de cicloide. Comparaba sus pesos: la relación de los pesos tenía que dar, más o menos, la relación de las áreas; es decir, que si el área del cicloide era tres veces mayor que la del círculo, también el peso del cicloide tenía que ser tres veces mayor que el del círculo de cartón. En resumen, los pesos son proporcionales a las áreas, si el cartón es «muy uniforme», o sea si el peso está uniformemente distribuido por la superficie, es decir si áreas iguales tienen pesos iguales. El método es muy útil para hacernos una idea del resultado, pero no nos asegura un resultado *exacto.* Torricelli, el último discípulo del viejo Galilei (junto con Vincenzo Viviani), recogiendo la idea de su maestro de que el área del cicloide es tres veces la del círculo que lo genera, consiguió demostrarlo con precisión, usando la mente en lugar de la balanza. Nos parece un buen ejemplo de la enorme utilidad que tiene para el progreso del conocimiento humano, el empleo tanto de la balanza como de la mente: la unión de las «especulaciones» de la razón con las medidas de la experiencia.

APÉNDICE NÚM. 11

Cálculo literal: símbolos y reglas

Las letras a, b, c, d, ... indican cantidades (números) *indeterminadas*, pero que hay que considerar *conocidas*, y no variables, sino *constantes.*

Las letras x, y y z y en general las últimas letras del alfabeto indican cantidades que no sólo son indeterminadas, sino también *incógnitas* (o sea desconocidas), y *variables.*

Una letra a, b, c..., x, y, z, indica un número que puede ser tanto positivo como negativo.

En el *cálculo literal*, o sea con letras en lugar de números, sólo se pueden utilizar las propiedades generales, o «formales», de las operaciones.

Algunas propiedades formales

Propiedad conmutativa de la adición: $a + b = b + a$;
de la multiplicación: $a(bc) = (ab)c$.

Propiedad asociativa de la adición: $a + (b + c) = (a + b) + c$;
de la multiplicación: $ab = ba$.

Propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$.

Para la multiplicación, se evita el signo × que se confunde con la letra x: se pone un punto, o nada, entre los factores:

$$a \cdot b = ab = a \times b.$$

El signo menos, o sea:

—, indica el *opuesto*. *Es decir* $(-a) = -a$, o sea el opuesto de a, o, lo que es lo mismo: $(-a) + a = 0$.

El opuesto del opuesto de a es el mismo a:

$-(-a) = a$. Por eso:

Regla del «menos» delante de un paréntesis

Se puede quitar el paréntesis sólo si cambiamos los «más» por «menos» y los «menos» por «más» dentro del paréntesis:

$$-(a - 2 - b + c) = -a + 2 + b - c.$$

En un producto, «menos» se pone entre paréntesis, para no confundirse con la sustracción:

$3 \cdot (-2)$ quiere decir: -6 (ver la regla siguiente);
$3 - 2$ quiere decir en cambio: 1.

Regla de los signos

«Más» por «más» = «más»; «menos» por «menos» = «más»;
«más» por «menos» = «menos»; «menos» por «más» = «menos».

$2 \cdot 3 = 6$; $(-2) \cdot (-3) = 6$;
$2 \cdot (-3) = -6$; $(-2) \cdot 3 = -6$.

APÉNDICE NÚM. 12

«Piensa un número...» «Ya lo he pensado»

Yo: «piensa un número». Tú (piensas el número 2, sin decírmelo, y respondes): «Ya lo he pensado.» «Dóblalo.» «Ya lo he doblado» (en tu interior: dos por dos cuatro). «Añade tres.» «Hecho» (cuatro más tres siete). «Multiplica el resultado por 10.» «Ya lo he multiplicado» (sin hablar: diez por siete setenta). «Vuelve a añadir cinco». «Ya lo he añadido» (voz interior: setenta más cinco setenta y cinco). «¿Qué te da?» «Setenta y cinco.» «Entonces ahora te digo el número que has pensado. Setenta y cinco menos treinta y cinco hacen cuarenta; cuarenta dividido entre veinte hacen dos; has pensado dos, ¿no es así?»

Podemos explicar fácilmente el truco si razonamos considerando el número que tú (que *él*) has pensado como un número «incógnito» que indicamos con la letra x (¡cálculo literal!) Entonces, el doble de x es $2x$; si añado tres obtengo $2x + 3$; si multiplico *todo* por 10 tengo $10(2x + 3) = 20x + 30$; si añado otros cinco, el resultado final es: $20x + 35$. Si entonces tú, o él, me decís que el resultado final es cierto número a (en el ejemplo, $a = 75$), yo tengo que resolver la ecuación siguiente para obtener la incógnita x:

$$20x + 35 = a;$$

y esto significa: quitar 35 del resultado a $(20x = a - 35)$; dividir por 20 el número obtenido en la sustracción anterior $(x = (a - 35)/20)$. Realmente hay un truco, y se puede ver con la ayuda del cálculo literal.

Podéis variar el juego y complicarlo a vuestro gusto; pero ¡no olvidéis hacer las preguntas en el orden que habéis preestablecido, y saberos de memoria la ecuación final!

APÉNDICE NÚM. 13

Una puerta medio cerrada no es una puerta medio abierta

(Cuando un movimiento puede realizarse en dos sentidos, o «lados» opuestos, hay que medir los desplazamientos con números positivos y *negativos*, si se quieren evitar errores y absurdos.)

«Demostremos» que: *cerrado* = *abierto*. En efecto: una puerta medio cerrada es lo mismo que una puerta medio abierta. Por eso:

medio cerrado = medio abierto;

multiplicado por dos:

cerrado = abierto.

¿Dónde está el error? Cerrado es el *opuesto* de abierto, y medio cerrado es el *opuesto* de medio abierto. En efecto, el movimiento de abrir (una puerta) consiste en hacerla girar un ángulo recto sobre sus bisagras en un *sentido determinado*, mientras que para cerrar la misma puerta hay que hacerla girar el mismo ángulo, pero en sentido *contrario*, y por eso los giros necesarios para cerrar la mitad, y para abrir la mitad, son iguales en amplitud, pero tienen *signo opuesto:*

1/2 cerrado = —(1/2 abierto).

y por lo tanto:

cerrado = — (abierto)

(en lugar del signo «menos» se puede decir: «opuesto de...»).

APÉNDICE NÚM. 14

Cálculo de (a + b³) *con el álgebra geométrica*

En la figura está dibujado un cubo que tiene por lado el segmento $a + b$, suma de dos segmentos a y b. Tomemos, en las tres aristas que salen del vértice de abajo a la derecha, los tres puntos situados a una distancia a de él; por estos puntos hacemos pasar los planos perpendiculares a las correspondientes aristas, que cortan al cubo en varios trozos. ¡Veamos cuáles son estos trozos, sin olvidarnos de ninguno!

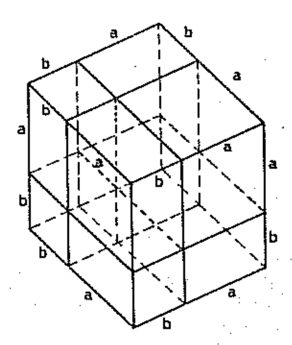


Figura 33

En primer lugar, arriba a la derecha, tenemos un cubo de lado a. Luego, abajo a la izquierda, tenemos un cubo de lado b. Apoyados a cada una de las tres caras internas de este cubo (dos «a los lados» y una «por encima») hay tres paralelepípedos, iguales entre sí, que tienen por base el cuadrado de b y por altura a. En cambio, apoyados en las tres caras internas del primer cubo de lado a, tenemos tres paralelepípedos iguales entre sí (uno «debajo», uno «detrás» y otro «a la izquierda»), que tienen por base el cuadrado de a y por altura b. Como resultado:

El cubo de un segmento suma de dos, a + b, *se puede descomponer en la suma del cubo del primero, más el cubo del segundo, más tres paralelepípedos que tienen por base el cuadrado del primero y por altura el segundo, más tres paralelepípedos que tienen por base el cuadrado del segundo y por altura el primero.*

Y (¡naturalmente!) se trata de la traducción exacta en lenguaje geométrico de la conocida fórmula algebraica:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2.$$

APÉNDICE NÚM. 15

Uno es igual a dos, o la operación prohibida

El cálculo literal es una «maquinilla» preciosa, pero algunas veces le puede estallar en la mano a quien la maneje con poco cuidado. Así que... atención: demostraremos que dos es igual a uno. Supongamos que sea $a = b$; entonces, si multiplicamos por a las dos partes:

$$a^2 = a \cdot b;$$

restando de las dos partes (de los dos miembros de la igualdad) la misma cantidad, b^2:

$$a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2$$

Pero, por una conocida regla de cálculo que por otra parte es fácil de comprobar, la diferencia de los cuadrados de dos números es igual a su suma multiplicada por su diferencia; por lo tanto:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = b(a - b)$$

[ya que, «poniendo en evidencia» a b, $a \cdot b - b^2 = b\,(a - b)$].

Ahora bien, en la igualdad:

$$(a + b)\,(a - b) = b\,(a - b)$$

parece que estaría permitido dividir por $a - b$ el primer y el segundo miembro; así pues:

$$a + b = b;$$

pero entonces, si $a = b$:

$$a + a = a, \text{ o sea:}$$
$$2 \cdot a = a, \text{ o sea:}$$
$$¡2 = 1!$$

Explicación: La división de los dos miembros de una igualdad por $(a - b)$ sólo está permitida si $(a - b)$ *es distinto de cero*, y está *prohibida* si $a = b$, porque entonces $a - b$ es igual a cero, y dividir por cero no tiene sentido.

APÉNDICE NÚM. 16

La convención de los signos en el espacio

En el espacio hay que tomar como referencia tres planos, perpendiculares entre sí, dos a dos (el suelo y dos paredes contiguas en una habitación, por ejemplo); vamos a llamarles p_1, p_2 y p_3 (ver el dibujo: p_1 es el suelo, p_2 la pared de la izquierda, y p_3 la de enfrente). Entonces a cada punto P del espacio se le pueden asociar las distancias a los tres planos citados, tomadas en un cierto orden, y medidas con un cierto metro, que hay que fijar de una vez por todas. En cuanto al orden, se suelen poner así: $\odot P_1 = x$ (distancia de P al plano p_3); $\odot P_2 = y$ (distancia de P al plano p_2); $\odot P_3 = z$ (distancia de P al plano p_3). Pero para conseguir que, razonando al contrario, a tres números (x,y,z) les corresponda *un solo* punto P del espacio, habrá que tomar en consideración tanto los números positivos como los *números negativos*, basándonos en la siguiente:

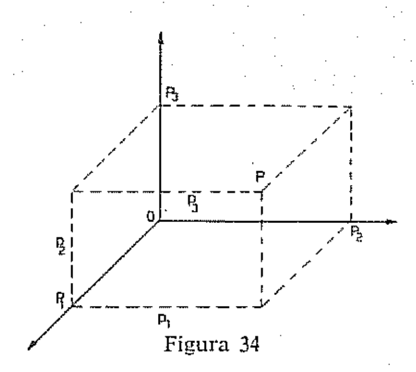


Figura 34

Convención de los signos en el espacio

La distancia x es *positiva* si P está *delante* de p_3; *negativa* si está *detrás*.

La distancia y es *positiva* si P está a la *derecha* de p_2; *negativa* si está a la *izquierda*.

La distancia z es *positiva* si P está *por encima* de p_1; *negativa* si P está *por debajo*.

APÉNDICE NÚM. 17

Las ecuaciones de la parábola y de la hipérbole equilátera

I. Hagamos el gráfico de la función:

$$y = x^2.$$

Esto significa realizar las siguientes operaciones:

1. Hacer una tabla de valores y asociados a valores x; por ejemplo: si $x = 0$, $y = 0$; si $x = 1$, $y = 1$; si $x = -1$, $y = (-1)^2 = 1$; si $x = 2$, $y = 4 = 2^2$; si $x = -2$, $y = 4 = (\sim -2)^2$;

2. Dibujar una curva que pase por los puntos (0,0), (1,1), (— 1,1), (2,4), (∼ — 2,4), etc. La curva se trazará con mayor precisión cuanto más precisa sea la tabla anterior, o sea cuanto más

cerca estén entre sí los valores de la x para los que se calculan los correspondientes valores de la y. La curva que se obtiene se llama *parábola;* es una *curva* que «viene» de arriba, de una distancia infinita, baja hasta el origen (su *vértice*), y vuelve a subir, con la misma andadura que en la bajada, hasta el infinito.

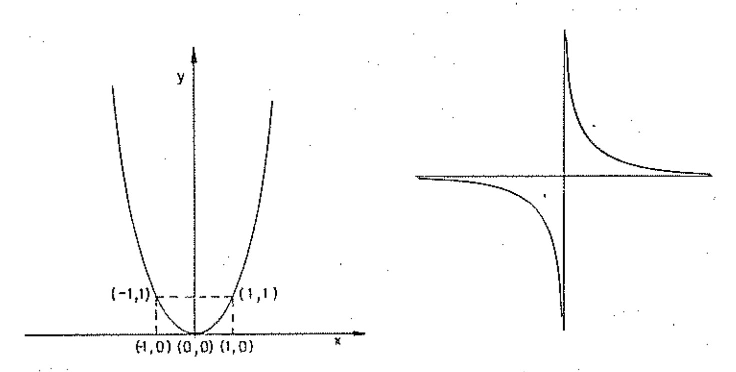


Figura 35

II. Vamos a formar el gráfico de la función:

$$y = 1/x.$$

En ella los puntos del gráfico son los puntos del plano para los que la ordenada es la inversa de la abscisa. (Recordemos que, por la regla de los signos, el inverso de un número negativo es negativo.) Por lo tanto: cuanto más grande es la abscisa, tanto más pequeña es la ordenada, y cuanto más pequeña es la abscisa, tanto más grande es la ordenada. Esto significa que, cuando la abscisa x tiende a 0 (se acerca al origen), la curva, gráfico de la función, se acerca cada vez más al eje y subiendo indefinidamente, o bajando indefinidamente (según sea x muy pequeña *positiva*, o muy pequeña *negativa*); mientras que, cuando la abscisa crece desmesuradamente, la ordenada del correspondiente punto de la curva es cada vez más pequeña, y la curva se acerca cada vez más al eje de las x, pero sin llegar a tocarlo nunca. La curva se llama *hipérbole equilátera*, y el eje x y el eje y son sus *asíntotas* (rectas a las que la curva se acerca indefinidamente). Se compone de dos *ramas.*

APÉNDICE NÚM. 18

Algunos símbolos que se emplean para la derivada y la integral (definida)

a) Al explicar el concepto de *derivada* con el ejemplo de la velocidad instantánea, se ha visto que el procedimiento de la «derivación» (de una función) consistía en esto:

1. Se toma una función: $y = f(x)$ (por ejemplo: $e = f(t)$, espacio = función del tiempo), y el valor y_1 correspondiente al valor $x_1 : y_1 = f(x_1)$.

2. Se considera una pequeña variación de x, de x_1 a un valor «cercano» x_2, y la correspondiente variación (incremento) de la y, $f(x_2) — (x_1)$.

3. Llamamos Δx a la pequeña variación (incremento) de la x, y llamamos Δy al correspondiente incremento de la y; entonces se considera la relación $\Delta y/\Delta x$ (Δ = *delta* es la letra del alfabeto griego que corresponde a nuestra D).

4. Si, haciendo que tienda a cero, es decir, a anularse, el incremento Δx, tomando unos valores de x_2 cada vez más próximos a x_1, la relación $\Delta y/\Delta x$ se acerca cada vez más a un *valor-límite*, ese valor límite se llama derivada de la función $y = f(x)$ para $x = x_0$.

Imaginando ahora a la derivada como la relación entre dos incrementos infinitesimales (evanescentes): dy, dx, se usa para ella el símbolo:

$$dy/dx$$

b) En vez de escribir, por ejemplo, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, los matemáticos escriben:

$\sum_{i=1}^{i=5} a_i$; lo que significa: suma de todas las a_i que se obtienen haciendo variar el *índice* i de 1 a 5 (es decir, precisamente, la suma escrita antes).

Para calcular una integral (definida), o sea un área, en el ejemplo dado por nosotros, hay que calcular en primer lugar de una forma aproximada al área en cuestión mediante pequeños rectángulos que, por ejemplo, estén inscritos; el área de cada uno de ellos vale:

$$f(x_i)\ \Delta x_i,$$

donde Δx_i es la anchura de la base, y $f(x_i)$ la altura. Esta suma se podrá escribir brevemente así:

$$\Sigma f(x_i)\ \Delta x_i.$$

Cuando se pasa a la integral, o sea a la suma de los infinitos pequeños rectángulos de base infinitamente pequeña, dx, se deforma el símbolo de sumación, o «sumatorio», Σ (la S griega llamada *sigma*), y se escribe:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Se dice: integral de a a b de $f(x)$ en dx.

APÉNDICE NÚM. 19

Respuestas a ciertas dudas

Que las matemáticas sean difíciles, y que haga falta una «cabeza especial» para entenderlas, es un cuento. Para entender las matemáticas vale cualquier cabeza normal, lo único que hace falta es paciencia, atención y concentración. Otra cosa ya es tener inclinación por las matemáticas; esto, efectivamente, es más raro. ¿Sabéis cómo se puede saber si uno tiene inclinación por las matemáticas? Hay que ver si, al leer una demostración, al ponerse a hacerla en un papel, le asaltan a uno las dudas, o no. Si se tienen dudas, se tiene «cabeza de matemático». Respondemos aquí a tres dudas, que pueden haber surgido en las mentes de aquellos de nuestros lectores que tienen más cabeza de matemáticos.

1. *A propósito de las dos distintas descomposiciones del cuadrado de lado* a + b *para demostrar el teorema de Pitágoras.* En la segunda descomposición, la parte central es efectivamente un cuadrado, y no un rombo. En efecto, la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es siempre igual a dos ángulos rectos, o sea a un ángulo llano. Ahora bien, consideremos por ejemplo los dos triángulos rectángulos apoyados en la base del cuadrado grande. Son rectángulos, e iguales. En cada uno de ellos, pues, la suma de los dos ángulos no rectos es igual a un ángulo recto. Pero el ángulo llano del que es vértice el vértice común a los dos triángulos citados, se compone de tres ángulos: dos de ellos son los ángulos no rectos del mismo triángulo rectángulo (tomados uno en un triángulo y otro en otro: ¡pero los triángulos son iguales!), por lo que el ángulo que nos queda es un ángulo recto, y el rombo es un *cuadrado.*

2. *A propósito del cálculo del área de la circunferencia con el método de los hilos.* Estirando todos los hilos circulares, o sea las circunferencias de círculos concéntricos, que componen el círculo, ¿tendré realmente un triángulo?, o sea, ¿los extremos de las circunferencias rectificadas se dispondrán en línea recta? Sí: porque Arquímedes nos enseña que las circunferencias son proporcionales a los diámetros, y por lo tanto a los radios; así, pues, los triángulos dibujados en la figura son todos semejantes entre sí, y por eso sus ángulos correspondientes son iguales, y los extremos de los lados horizontales están en línea recta. ¡Con esto advertimos que hemos utilizado cierto teorema «inverso» acerca de la semejanza de los triángulos, para evitar que surja otra duda más!

3. *A propósito de la ecuación de la circunferencia de centro, origen y radio 1.* La ecuación se verifica también con los puntos para los que alguna coordenada es un número negativo. En efecto, recordad la regla «menos por menos = más»; de ella se deduce que todos los cuadrados son positivos, o sea que multiplicando un número negativo por sí mismo se obtiene el cuadrado del correspondiente número positivo. Ya que en el teorema de Pitágoras entran en juego los cuadrados, no tiene importancia el signo con que se toma la medida de los catetos.

Si tenéis otras dudas... resolvedlas vosotros.

Índice

COLECCIÓN LAIA/PAPERBACK

Literatura (narrativa, poesia, crítica literaria...), política (nacional e internacional), urbanismo, documentos, pedagogía, psicologia, sociología, filosofía, historia, reportaje...

1. **SOBRE EL ESTADO CAPITALISTA**, Nicos Poulantzas. (2.ª ed.).
2. **LA BAZA DEL PETRÓLEO**, Jean-Marie Chevalier.
3. **LA ORQUESTA ROJA**, Gilles Perrault.
4. **CRÓNICA PEDAGÓGICA**, Mario Lodi. (2.ª edición).
5. **POLÍTICA INTERNACIONAL Y CONFLICTOS DE CLASE**, J. Solé-Tura.
6. **PUERICULTURA Y MORAL DE CLASE**, Luc Boltanski.
7. **PRINCIPIOS DE CRÍTICA LITERARIA**, Wilbur Scott. (2.ª ed.).
8. **SOBRE LA FILOSOFÍA Y SU NO-LUGAR EN EL MARXISMO**, Luis Crespo / José Ramoneda / Molins.
9. **ORACIÓN DE CAMPESINOS**, Eliseo Bayo.
10. **PORTUGAL: LA MUERTE DE UN FASCISMO**, Xavier Roig.
11. **RENAULT: LA FORTALEZA OBRERA**, Jacques Frémontier.
12. **SAN JUAN DE LA CRUZ**, Gerald Brenan.
13. **SOCIEDAD CATALANA Y REFORMA ESCOLAR**, Joan Gay, Àngels Pascual, Rosa Quitllet.
14. **LA BARCELONA DE PORCIOLES**, varios.
15. **VIDA Y MILAGROS DE MONSEÑOR ESCRIVÀ DE BALAGUER, FUNDADOR DEL OPUS DEI**, Luis Carandell. (4.ª edición).
16. **A CUESTAS CON MIS PERSONAJES**, Francisco Candel.
17. **CULTURA Y COMUNICACIONES DE MASAS**, M. A. Garretón, H. Valdés, L. Domínguez, C. Ossa, A. M. Mattelart, A. Dorfmann, C. Maldonado.
18. **ELEMENTOS DE AUTOCRÍTICA**, Louis Althusser.
19. **APROXIMACIÓN A LA SOCIOLOGÍA**, M. A. Coulson y D. S. Riddell.
20. **¡HAGAN JUEGO, SEÑORES...!**, José Martí Gómez y Josep Ramoneda.
21. **LA CIUDAD QUEMADA**, Antoni Ribas / Miguel Sanz.
22. **LÓPEZ RAIMUNDO, LA SOLEDAD DEL CORREDOR DE FONDO**, Xavier Vinader, José Martí Gómez/Josep Ramoneda.
23. **LA AGONÍA DE LA UNIVERSIDAD FRANQUISTA**, Equipo Límite.
24. **FRENTE POLISARIO: LA ÚLTIMA GUERRILLA**, Rafael Wirth/Soledad Balaguer.
25. **CALVO SERER: EL EXILIO Y EL REINO**, José Martí Gómez / Josep Ramoneda.
26. **EL ENCUENTRO, DIÁLOGO SOBRE «EL DIÁLOGO»**, M. Azcárate, J. M. Díez Alegría, M. ordà, J. M. Llanos, J. J. Rodríguez Ugarte.
27. **LA SALUD, EXIGENCIA POPULAR**, N. Acarín, R. Espasa, J. Vergés, M. Campo.

28. SANTIAGO CARRILLO: MAÑANA ESPAÑA, Max Gallo y Régis Debray. (3.ª edición).
29. CRISTIANOS EN EL PARTIDO, COMUNISTAS EN LA IGLESIA, Alfonso Comín.
30. CHINA: OTRA CALIDAD DE VIDA, Wilfred G. Burchett.
31. EL FENÓMENO ESTALINIANO, Jean Elleinstein.
32. MEMORIA DE LA MELANCOLÍA, María Teresa León. (2.ª ed.).
33. MISERIA Y DEPENDENCIA CIENTÍFICA EN ESPAÑA, Joan Senent-Josa.
34. SERVICIO NACIONAL DE SALUD, N. Acarín, R. Espasa, C. Sans, J. Vergés.
35. INTEGRACIÓN CAPITALISTA Y RUPTURA OBRERA, Paul Mattick.
36. EL MEDICAMENTO Y SU ENTORNO, J. Áltimiras, J. Bonal, P. Cánovas, R. Gisbert.
37. DIARIO DE LA CIA, Philip Agee.
38. LA CONQUISTA DE LA CIUDADELA, Günter Herburger.
39. URUGUAY VENCERÁ, Zelmar Michelini.
40. EL COMPROMISO DE LA POESÍA EN LA GUERRA CIVIL ESPAÑOLA, Natalia Calamai.
41. DÍAS Y NOCHES DE AMOR Y DE GUERRA, Eduardo Galeano. (Premio Casa de las Américas, 1978). (5.ª edición).
42. PRAGA, DIEZ AÑOS DESPUÉS (1968-1978), Jiri Hajek.
43. GUILLERMO TELL, UNA HISTORIA EJEMPLAR, Max Frisch.
44. ACERO DE MADRID, José Herrera Petere.
45. EL PODER MILITAR EN ESPAÑA, Vicenç Fisas.
46. LA PEDAGOGÍA FREINET POR QUIENES LA PRACTICAN, Autores diversos.
47. MEMORIAS ANDALUZAS, Paco Montes Marmolejo.
48. LA BATALLA DE PUEBLA, J. I. González Faus, J. Jiménez, J. Sobrino, L. Boff, L. A. Gómez de Souza, C. Boff, G. Gutiérrez, J. M. Alemany.
49. PODER Y OPOSICIÓN EN LAS SOCIEDADES POSTREVOLUCIONARIAS, K. S. Karol, R. Rossanda, D. Singer, L. Pliuso, G. Girardet, F. Marek, J. Pelikan, E. Masi, E. Baluka, Ch. Bettelheim, B. Weil, F. Fortini, I. Mészáros, E. Giovannini, R. Villari, H. Terzian, L. Magri, B. Trentin, A. Comín, L. Althusser, F. Claudín, L. Covolo, F. Cerutti, R. Linhart, K. Pomian.
50. UN SOCIALISMO POR INVENTAR, Lucio Lombardo Radice.
51. JUAN PABLO WOJTYLA. CRÓNICA INSÓLITA DE UN PAPA. Stefano de Andreis, Marcela Leone (4.ª edición).
52. COMUNISMO EN LIBERTAD. Recuento y perspectivas desde la marginación. Robert Havemann.
53. LA LUCHA ANTIFASCISTA, Giorgio Amendola. (Entrevista a cargo de Piero Melograni).
54. INSIEME, Diario de clase. Mario Lodi.
55. PRESENTACIÓN DE LA TEOLOGÍA, Alfredo Fierro.
56. INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA NOVELA, J. Sauvage.
57. CONFESIONES DE UN TORTURADOR, J. Víctor.

36. **CINCO ENSAYOS DE MATERIALISMO HISTÓRICO, Etienne Balibar.**
38. **LA EDUCACIÓN HUMANA DEL HOMBRE, Bogdan Suchodolski.**
39. **LA REPRODUCCIÓN, Pierre Bourdieu, Jean-Claude Passeron.**
40. **GRAMSCI Y LA CUESTIÓN RELIGIOSA, Hugues Portelli.**
41. **LAS NUEVAS CIUDADES, Pierre Merlin.**
42. **LA CRISIS ECONÓMICA MUNDIAL Y EL CAPITALISMO AMERICANO, Manuel Castells.**
43. **HACER LA HISTORIA, Jacques Le Goff/Pierre Nora.** Con la colaboración de: **M. Certeau, F. Furet, P. Weyne, A. Leroi-Gourhan, H. Moniot, N. Wachtel, G. Duby, P. Vilar, P. Nora.** Vol. I.
44. **LYSENKO, Dominique Lecourt.** Prólogo de **Louis Althusser.**
45. **LOS TRASTORNOS DE LA ESCRITURA INFANTIL, Marguerite Auzias.**
46. **LA CUESTIÓN ESCOLAR, Jesús Palacios.** 2.ª ed. **(Rousseau, Ferrière, Piaget, Freinet, Wallon, Ferrer, Neill, Rogers, Lobrot, Oury, Vásquez, Freud, Mendel, Marx, Engels, Lenin, Makarenko, Blonskij, Gramsci, Althusser, Bourdieu, Passeron, Baudelot, Establet, Suchodolski, Freire, Illich, Reimer.)**
47. **HACER LA HISTORIA, Jacques Le Goff/Pierre Nora.** Con la colaboración de: **A. Schnapp, P. Chaunu, A. Burguière, A. Dupront, D. Julia, J. Starobinski, H. Zerner, J. Bouvier, M. Serres, J. Julliard.** Vol. II.
48. **ESCRITOS DE PEDIATRÍA Y PSICOANÁLISIS, D. W. Winnicott.**
49. **CRÍTICA DE LA RELIGIÓN Y ANTROPOLOGÍA EN LUDWIG FEUERBACH, Gabriel Amengual.**
50. **HACER LA HISTORIA, Jacques Le Goff/Pierre Nora.** Con la colaboración de: **E. Le Roy Ladurie, A. Besançon, M. Detienne, J. Le Goff, J. C. Chevalier, R. Charlier, D. Roche, P. Vidal-Naquet, J. P. Peter, J. Revel, M. Ferro, J. P. Aron, J. Ozouf, M. Ozouf.** Vol. III.
51. **LA ESCUELA FREINET, Élise Freinet. Los niños en un medio natural.**
52. **LA CULTURA Y EL PUEBLO, Christopher H. Cobb.**
53. **INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA NOVELA, J. Souvage.**
54. **SALUD MENTAL Y TRABAJO SOCIAL,** edición de **M. T. Rossell y J. Tizón.**
55. **HISTORIA DEL DERECHO MERCANTIL, Francesco Galgano.**
56. **EL FIN DE LA ERA KEYNESIANA,** edición de **Robert Skidelsky.**